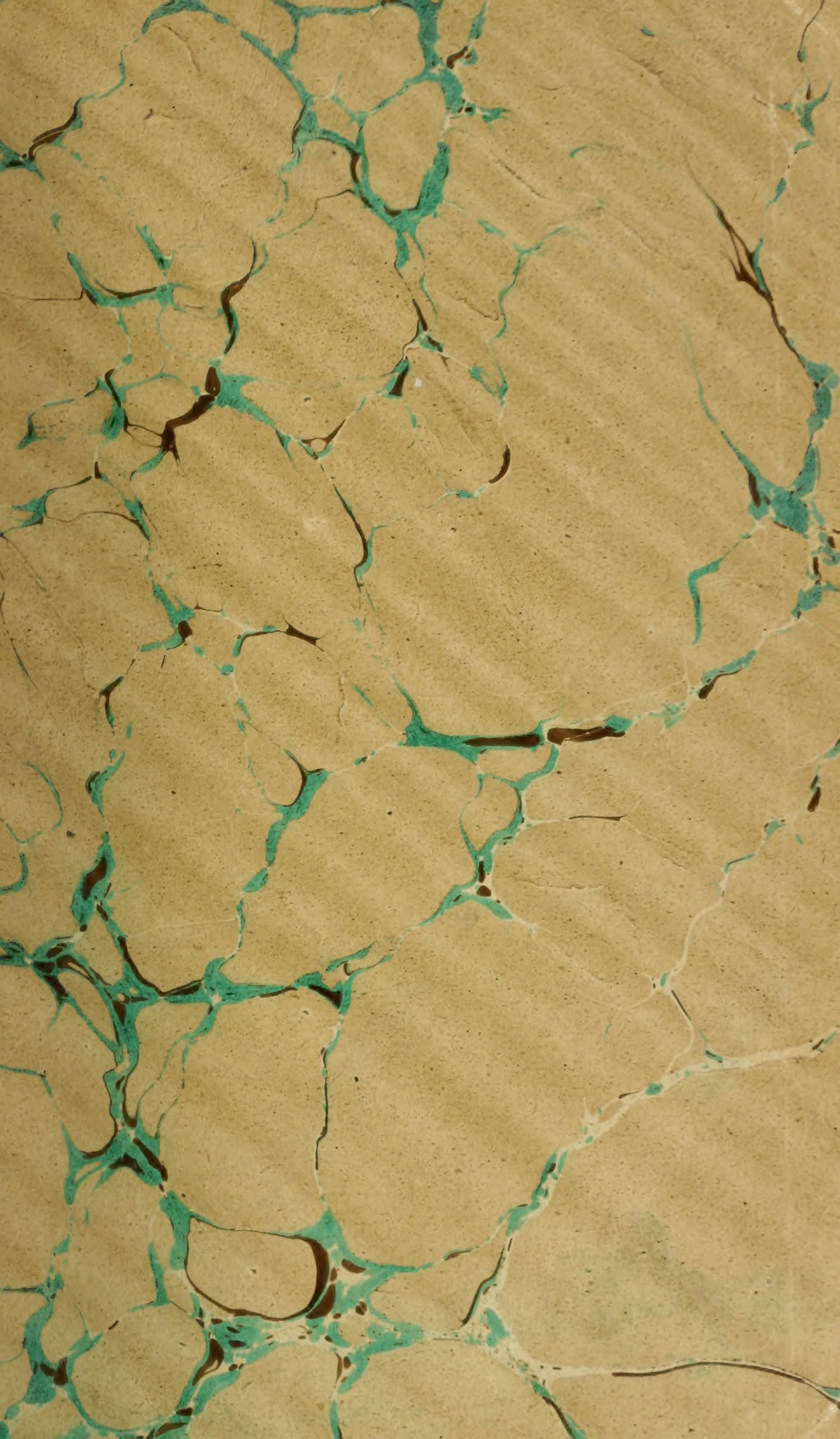






NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1869.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

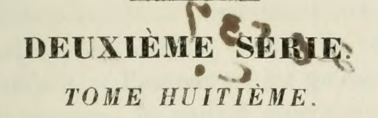
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

J. BOURGET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES.



DEUXIÈME SÉRIE.

TOME HUITIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM;

CONTINUÉE, A PARTIR DE 1863, PAR MM. GERONO ET PROUHET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1869.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

LA SPIRALE ÉQUIANGLE,

SES PRINCIPALES PROPRIÉTÉS PROUVÉES GÉOMÉTRIQUEMENT (*).

Traduit de *The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics.*

Parmi les propositions suivantes, celles qui donnent des constructions géométriques pour les centres de gravité d'un arc et d'une aire de spirale offrent seules des résultats qui seront probablement nouveaux pour le lecteur. On a ajouté les autres propositions en pensant qu'il serait agréable d'avoir les démonstrations géométriques des principales propriétés de cette belle courbe réunies en un seul article, et l'auteur espère qu'on trouvera profitable et intéressant le nouvel aspect sous lequel il a présenté ici la courbe.

DÉFINITION. — *Toute courbe partant d'un point fixe, appelé* pôle, *et telle, que l'arc intercepté entre ce point et tout autre point de la courbe soit toujours semblable à lui-même, est appelée* spirale équiangle (**).

(*) Le lecteur est prié de faire les figures en se guidant sur celle du texte.

(**) Des différentes définitions des figures semblables, la plus convenable à adopter est la suivante : Deux courbes sont dites *semblables* lorsque par deux points semblablement placés de chacune d'elles, on peut mener deux cordes telles, que leurs longueurs et celles de deux autres cordes également inclinées sur elles soient proportionnelles.

Nous avons préféré cette définition à la définition usuelle, parce que les démonstrations que nous allons présenter sont fondées sur la propriété de similitude continuelle plutôt que sur celle d'où la courbe a tiré son nom. Nous pensons d'ailleurs que la propriété par nous adoptée est plus naturelle que celle qui sert à définir la courbe, et, si l'on peut parler ainsi, *plus complétement intrinsèque*, puisqu'elle embrasse seulement la forme de la courbe, en dehors des accessoires, tels que la tangente et le rayon vecteur.

Nous allons déduire de notre définition la propriété qui la définit ordinairement et d'où lui est venu son nom.

Proposition I. — *La tangente en un point d'une spirale équiangle fait un angle constant avec le rayon vecteur du point de contact.*

Car, soient OP, OQ deux rayons polaires quelconques dans la spirale OKP; OP′, OQ′ deux autres rayons faisant des angles égaux POP′, QOQ′ avec les deux premiers.

Alors, puisque OKP, OKQ sont des figures semblables, et que OP′, OQ′ font des angles égaux avec les lignes correspondantes OP, OQ, OPP′, OQQ′ seront des triangles semblables, et les angles OPP′, OQQ′ sont égaux; donc, à la limite, lorsque P′, Q′ seront venus coïncider avec P, Q, les tangentes en P et en Q feront des angles égaux avec les rayons vecteurs, et ces points sont deux points quelconques de la courbe. Donc, etc.

C. Q. F. D.

Définition. — L'angle constant que fait la tangente avec le rayon vecteur est appelé l'*angle de la spirale*. Dans la suite, nous le désignerons toujours par α.

Proposition II. — *Si sur un rayon vecteur quelconque* OP, *on construit un triangle* OPQ *semblable à un triangle donné, le lieu du sommet* Q *sera une spirale semblable à la spirale originaire.*

En effet, soient OP, OP′ deux rayons polaires quelconques; OQP, OQ′P′ les triangles construits sur ces rayons. Alors, puisque ceux-ci sont semblables, nous avons

$$OP : OP' = OQ : OQ'.$$

D'ailleurs, puisque les angles POQ, P′OQ′ sont égaux, ajoutons (ou retranchons) l'angle QOP′, les angles POP′, QOQ′ seront égaux, et il est démontré que

$$OP : OP' = OQ : OQ';$$

donc PP′, QQ′ sont des courbes semblables, OP, OQ étant des lignes correspondantes.

Donc, etc. C. Q. F. D.

Proposition III. — *Si du pôle* O *on mène une ligne* OQ *à angle droit sur le rayon vecteur* OP, *de façon à rencontrer la normale à* P *en* Q, *le lieu du point* Q *est la développée de la spirale, et est une spirale semblable, et* Q *est le centre de courbure au point* P.

En effet, l'angle OPQ est le complément de l'angle de la spirale, donc l'angle OQP est égal à l'angle de la spirale, donc le triangle OQP est toujours semblable à lui-même, où que le point P soit pris.

Donc (Proposition II) le lieu de Q est une spirale semblable, et puisque OQP est égal à l'angle de la spirale, QP est la tangente en Q au lieu de Q, donc le lieu de Q est l'enveloppe de la normale PQ, ou bien est la développée de la courbe, et Q est le centre de courbure en P. C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Prolongeons le rayon vecteur* PO *jusqu'en* V, *en prenant* OV *égal à* OP, *alors* PV *est la corde de courbure par* O.

En effet, puisque Q est le centre du cercle de courbure et que QO rencontre PV à angle droit, P est sur le cercle aussi bien que V, donc PV est la corde.

Corollaire II. — Si OY est la perpendiculaire sur la tangente en P, nous avons

$$OY = OP \sin\alpha,$$

$$OP = PQ \sin\alpha,$$

ou, en employant la notation usuelle de l'analyse,

$$p = r \sin\alpha, \quad r = \rho \sin\alpha.$$

Proposition IV : Problème. — *Trouver la longueur de l'arc compris entre le pôle et un point fixe quelconque.*

Soient OP, OP′ deux rayons polaires très-voisins l'un de l'autre; alors, puisque OKP, OKP′ sont des courbes semblables (Définition),

$$\text{arc}\,OKP : \text{arc}\,OKP' = OP : OP';$$

donc

$$\text{arc}\,OKP : \text{arc}\,PP' = OP : (OP' - OP).$$

Menons PN perpendiculaire sur OP′; alors, à la limite, quand PP′ diminue indéfiniment, $OP' - OP = P'N$; donc, à la limite,

$$\text{arc}\,OKP : PP' = OP : P'N,$$

ou

$$\text{arc}\,OKP : OP = PP' : P'N = \text{séc}\,\alpha : 1;$$

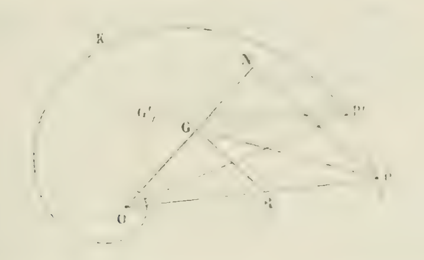
donc

$$\text{arc}\,OKP = OP\,\text{séc}\,\alpha,$$

ou bien *la longueur de l'arc compris entre le pôle et un point fixe quelconque est égale au produit de la lon-*

gueur du rayon extrême par la sécante de l'angle de la spirale.

Proposition V : Problème. — *Trouver le centre de gravité d'un arc homogène de la spirale équiangle compris entre le pôle et un point fixe quelconque.*



Soient OKP la spirale, OP, OP′ deux rayons polaires voisins l'un de l'autre. Soit un certain point G le centre de gravité de OKP. Joignons OG, GP, et sur OP′ construisons le triangle OG′P′ semblable à OGP. Alors, puisque G, G′ sont des points correspondants dans les figures semblables OKP, OKP′, G′ est le centre de gravité de OKP′; donc GG′ prolongé doit passer par le centre de gravité de PP′. Pourvu qu'à la limite nous fassions mouvoir P′ jusqu'à coïncider avec P, nous pouvons prendre P comme centre de gravité de PP′, et à la limite, quand P, P′ coïncideront, G, G′ coïncideront, et GG′ deviendra la tangente en G au lieu de G; donc la tangente en G au lieu de G passe par P. Mais le lieu de G est, d'après la proposition II, une spirale semblable; donc l'angle OGP est le supplément de l'angle de la spirale.

De plus, puisque G, G′ sont les centres de gravité des arcs OKP, OKP′ et P le centre de gravité (à la limite) de leur différence, nous avons à la limite

$$PG \text{ arc } PP' = GG' \text{ arc } OKP.$$

Mais par les figures semblables

$$PP' : GG' = OP : OG,$$

et par la proposition IV,

$$\text{arc}\, OKP = OP \,\text{séc}\, \alpha\,;$$

donc

$$PG = OG \,\text{séc}\, \alpha.$$

Menons PN perpendiculaire sur OG ; alors

$$GN = PG \cos \alpha = OG,$$

donc

$$OG = \frac{1}{2} ON.$$

Sur OP prenons

$$OR = \frac{1}{2} OP,$$

alors le cercle décrit sur OR comme diamètre passe par G ; donc G est le point d'intersection du cercle décrit sur OR comme diamètre avec le segment circulaire capable d'un angle supplémentaire de l'angle de la spirale décrit sur OP comme corde.

Ainsi G est déterminé. C. Q. F. F.

Corollaire. — Si O est le pôle, OP le rayon vecteur extrême d'une série de spirales équiangles de différents angles, les centres de gravité de leurs arcs sont tous sur le cercle passant par O, et ayant son centre sur OP à une distance de O égale à $\frac{OP}{4}$.

Proposition VI : Problème. — *Trouver l'aire engendrée par le rayon vecteur décrivant la spirale depuis le pôle jusqu'à un certain point donné.*

Soient OP, OP' deux rayons voisins l'un de l'autre.

alors, puisque OKP, OKP′ sont des figures semblables, leurs aires sont en raison doublée de leurs lignes homologues; donc

$$\text{aire OKP} : \text{aire OKP}' = \overline{\text{OP}}^2 : \overline{\text{OP}'}^2,$$

et aussi

$$\text{aire OKP} : \text{aire POP}' = \overline{\text{OP}}^2 : (\overline{\text{OP}'}^2 - \overline{\text{OP}}^2);$$

donc

$$\text{aire OKP} = \overline{\text{OP}}^2 \frac{\text{aire POP}'}{\overline{\text{OP}'}^2 - \overline{\text{OP}}^2}.$$

Cela est toujours vrai, et par conséquent vrai à la limite quand P′ se meut jusqu'à coïncider avec P. Menons PN perpendiculaire sur OP′, alors

$$\text{aire POP}' = \frac{1}{2}\,\text{OP}'.\text{PN} \text{ à la limite},$$

et

$$\overline{\text{OP}'}^2 - \overline{\text{OP}}^2 = 2\,\text{OP}'.\text{P}'\text{N} \text{ à la limite};$$

donc

$$\text{aire OKP} = \overline{\text{OP}}^2 \lim \frac{\frac{1}{2}\text{OP}'.\text{PN}}{2\,\text{OP}'.\text{P}'\text{N}} = \frac{1}{4}\overline{\text{OP}}^2 \tang \alpha,$$

ou bien *l'aire engendrée par le rayon vecteur depuis le pôle jusqu'à un certain point est égale au quart du produit du carré du rayon extrême par la tangente de l'angle de la spirale.*

Proposition VII : Problème. — *Trouver le centre de gravité de l'aire engendrée par le rayon vecteur extrême entre le pôle et un certain point de la spirale équiangle.*

Soient OP, OP′ deux rayons adjacents. Prenons G pour le centre de gravité de l'aire OKP; alors comme

dans la proposition V, G′ semblablement placé dans OKP′ sera le centre de l'aire OKP′.

Sur OP prenons OH égal à $\frac{2}{3}$OP, alors, à la limite, H est le centre de gravité de l'aire évanouissante OPP′; donc, comme dans la proposition V, l'angle OGH est le supplément de l'angle de la spirale, et

$$GG' \text{ aire } OKP = GH \text{ aire } OPP'.$$

Maintenant

$$\text{aire } OKP = \frac{1}{4}\overline{OP}^2 \tan\alpha \quad (\text{Prop. VI}),$$

$$\text{aire } OPP' = \frac{1}{2} OP \,.\, PP' \sin\alpha,$$

et

$$GG' : PP' : OG : OP$$

par les triangles semblables; donc

$$OG \operatorname{séc}\alpha = 2\,GH;$$

donc, si nous menons HN perpendiculaire sur OG, nous aurons

$$GN = GH\cos\alpha = \frac{1}{2}\,OG;$$

donc

$$OG = \frac{2}{3}\,ON.$$

Sur ON prenons

$$OR = \frac{2}{3}\,OH = \frac{4}{9}\,OP,$$

alors le cercle décrit sur OR comme diamètre passe par G.

Donc G est le point d'intersection du cercle décrit sur OR comme diamètre avec le segment de cercle capable du

supplément de l'angle de la spirale décrit sur OH comme corde, où

$$\mathrm{OH} = \frac{2}{3}\,\mathrm{OP}, \quad \mathrm{OR} = \frac{4}{9}\,\mathrm{OP}.$$

Ainsi G est déterminé. C. Q. F. F.

Proposition VIII : Problème. — *Trouver le moment d'inertie de l'arc d'une spirale équiangle par rapport à une perpendiculaire par son pôle à son plan.*

Supposons égale à l'unité la masse de l'unité de longueur.

Soient OP, OP' deux rayons quelconques, alors, puisque OKP, OKP' sont des courbes semblables, nous avons

$$\frac{\text{mom. d'inert. de OKP}}{\overline{\mathrm{OP}}^3} = \frac{\text{mom. d'inert. de OKP}'}{\overline{\mathrm{OP}'}^3},$$

et par conséquent

$$= \frac{\text{mom. d'inert. de PP}'}{\overline{\mathrm{OP}'}^3 - \overline{\mathrm{OP}}^3},$$

et cela sera vrai à la limite, quand P' coïncidera enfin avec P ; donc

$$\frac{\text{mom. d'inert. de OKP}}{\overline{\mathrm{OP}}^3} = \frac{\overline{\mathrm{OP}}^2 \,.\, \mathrm{PP}'}{3\overline{\mathrm{OP}}^2 \,.\, \mathrm{P'N}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\alpha,$$

ou bien

$$\text{mom. d'inert. de OKP} = \frac{1}{3}\,\overline{\mathrm{OP}}^3\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\alpha;$$

donc *le moment d'inertie d'un certain arc partant du pôle par rapport à une perpendiculaire à son plan par le pôle est le tiers du produit du cube du rayon extrême par la sécante de l'angle de la spirale.*

Proposition IX : Problème. — *Trouver le moment d'inertie de l'aire d'une spirale équiangle par rapport à une perpendiculaire à son plan par le pôle.*

Supposons égale à l'unité la masse de l'unité de surface.

Soient OP, OP′ deux rayons quelconques : alors, puisque OKP, OKP′ sont des courbes semblables, nous aurons

$$\frac{\text{mom. d'inert. de OKP}}{\overline{\text{OP}}^4} = \frac{\text{mom. d'inert. de OKP}'}{\overline{\text{OP}'}^4},$$

et, par conséquent,

$$= \frac{\text{mom. d'inert. de POP}'}{\overline{\text{OP}'}^4 - \overline{\text{OP}}^4},$$

et cela est vrai aussi à la limite ; donc

$$\frac{\text{mom. d'inert. de OKP}}{\overline{\text{OP}}^4} = \frac{\frac{1}{2}\overline{\text{OP}}^2 . \Delta\,\text{POP}'}{\overline{\text{OP}'}^4 - \overline{\text{OP}}^4}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\overline{\text{OP}}^3 . \text{PP}'\sin\alpha}{4\overline{\text{OP}}^3\,\text{PP}'\cos\alpha} = \frac{1}{16}\,\text{tang}\,\alpha.$$

Donc *le moment d'inertie de l'aire engendrée par le rayon vecteur décrivant un certain arc à partir du pôle, par rapport au pôle, est* $\frac{1}{16}$ *du produit de la quatrième puissance du rayon extrême par la tangente de l'angle de la spirale.*

Observation. — La même méthode peut s'appliquer dans un grand nombre d'autres cas.

Proposition X. — *Dans une spirale équiangle, les rayons polaires des points dont les angles vecteurs sont*

en progression arithmétique sont eux-mêmes en progression géométrique.

Soient OP, OQ, OR trois rayons dont les angles vecteurs sont en progression arithmétique, alors les angles POQ, QOR sont égaux. Donc, puisque PQKO, QRKO sont des figures semblables, et OP, OQ des lignes correspondantes, OQ, OR sont aussi des lignes correspondantes ; donc

$$OP : OQ = OQ : OR,$$

et OP, OQ, OR sont en progression géométrique ; mais ce sont trois lignes quelconques ayant leurs angles vecteurs en progression arithmétique ; donc, etc.

C. Q. F. D.

Corollaire I. — Si trois points ont leurs angles vecteurs en progression arithmétique, les logarithmes des rapports de leurs rayons polaires au premier rayon sont aussi en progression arithmétique.

Corollaire II. — Si l'on prend une série de points dont les angles vecteurs soient des multiples d'un angle donné, les logarithmes des rapports de leurs rayons au premier rayon sont les mêmes multiples du logarithme du rapport du rayon correspondant à l'angle vecteur donné au premier rayon.

Corollaire III. — Si l'on prend une série de points dont les angles vecteurs soient *commensurables*, ces angles varieront comme les logarithmes des rapports des rayons vecteurs correspondants au premier rayon.

Observation. — Par la réduction *à l'absurde*, ceci peut aisément s'étendre au cas où les angles sont *incommensurables ;* donc le théorème est général :

Le logarithme du rapport du rayon vecteur en un

certain point de la spirale équiangle au premier rayon varie comme l'angle vecteur.

Ou, si OA est le premier rayon, OP un autre rayon,

$$\log \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = \mu . \widehat{\mathrm{POA}}.$$

Déterminer μ. — Puisque μ a la même valeur où que l'on prenne P, l'équation ci-dessus subsistera quand P approchera indéfiniment de A. Mais, dans ce cas,

$$\log \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = \log \left(1 - \frac{\mathrm{AP}\cos\alpha}{\mathrm{OA}}\right) = -\frac{\mathrm{AP}\cos\alpha}{\mathrm{OA}} \text{ à la limite,}$$

et

$$\widehat{\mathrm{POA}} = \frac{\mathrm{PA}\sin\alpha}{\mathrm{OA}} \text{ à la limite;}$$

d'où

$$-\frac{\mathrm{AP}\cos\alpha}{\mathrm{OA}} = \mu \frac{\mathrm{AP}\sin\alpha}{\mathrm{OA}},$$

$$\mu = -\cot\alpha;$$

d'où, P étant un point quelconque de la courbe,

$$\log \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = -\cot\alpha . \widehat{\mathrm{POA}},$$

ou bien, avec la notation de la géométrie analytique,

$$\log \frac{r}{a} = -\theta\cot\alpha.$$

Si nous mesurons θ dans la direction de r *croissant*, ceci devient

$$\log \frac{r}{a} = \theta\cot\alpha.$$

ou

$$r = a\varepsilon^{\theta\cot\alpha};$$

c'est l'équation usuelle de la spirale.

W...

SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON;

PAR M. DARBOUX.

Désignons par a et b ($a < b$) deux nombres qui comprennent *une seule racine simple* de l'équation proposée

$$(1) \qquad f(x) = 0.$$

Admettons de plus que l'équation

$$(2) \qquad f''(x) = 0$$

n'ait pas de racine comprise entre a et b, de telle sorte que $f''(x)$ garde le même signe quand x passe de a à b. Nous ne supposons rien sur la dérivée première, qui peut changer de signe dans l'intervalle de a à b (*).

Cela posé, soient $a+h$ ou $b-k$ la racine exacte. Nous aurons, pour déterminer les corrections h et k, les relations

$$0 = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta h),$$

$$0 = f(b-k) = f(b) - kf'(b) + \frac{k^2}{2} f''(b-\theta' k),$$

θ et θ' désignant des nombres positifs moindres que l'unité. De là nous déduisons :

$$(3) \qquad h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)} = \alpha + \alpha_1,$$

$$(4) \qquad k = \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{k^2}{2} \frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)} = \beta + \beta_1,$$

(*) Nous remarquerons toutefois que $f'(x)$ ne peut s'annuler qu'une fois, car deux racines de $f'(x)$ comprennent au moins une racine de $f''(x)$.

en posant

$$(5)\qquad \alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)},\quad \alpha_1 = -\frac{h^2}{2}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)},$$

et

$$(6)\qquad \beta = \frac{f(b)}{f'(b)},\quad \beta_1 = \frac{k^2}{2}\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}.$$

On voit donc que si l'on néglige les quantités α_1 et β_1, qui sont très-petites en général, les corrections se réduisent h à α, k à β. On peut donc dire avec Newton que la correction positive ou négative est donnée approximativement par la formule

$$(7)\qquad h = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

a désignant une racine approchée, soit par défaut, soit par excès.

Discussion.

Proposons-nous de chercher quelles sont les conditions pour que la correction newtonnienne soit *sûrement* applicable, et quelle est celle des deux limites a et b qu'il faut substituer dans la formule générale

$$-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Remarquons que des trois nombres

$$a,\quad a+\alpha,\quad a+\alpha+\alpha_1,$$

le premier représente la valeur approchée de x, le dernier la valeur exacte de x; donc nous serons *certains* que la correction α est applicable et que $a+\alpha$ est plus approchée que a si les deux différences

$$(a+\alpha) - a = \alpha,$$

$$(a+\alpha+\alpha_1) - (a+\alpha) = \alpha_1,$$

sont de mêmes signes; ou bien, en nous reportant aux valeurs de ces différences, si

$$f(a) \quad \text{et} \quad f''(a + \theta h)$$

sont de mêmes signes; ou encore si

$$f(a) \quad \text{et} \quad f''(a)$$

sont de mêmes signes, puisque $f''(x)$ ne s'annule pas entre a et b.

Nous trouverons de même, en considérant les trois nombres

$$b - \beta - \beta_1, \quad b - \beta, \quad b,$$

que la correction β est *sûrement* applicable si

$$f(b) \quad \text{et} \quad f''(b)$$

sont de mêmes signes.

Comme d'ailleurs les fractions

$$\frac{f(a)}{f''(a)} \quad \text{et} \quad \frac{f(b)}{f''(b)}$$

sont de signes contraires, une seule des deux corrections est *sûrement* applicable, et nous pouvons formuler le théorème suivant qui résume notre discussion :

Théorème. — *Si entre a et b, qui comprennent une seule racine simple, la dérivée seconde ne change pas de signe, on peut appliquer avec certitude la correction de Newton à celle des deux limites pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe.*

Remarques.

I. La condition que $f(x)$ et $f''(x)$ aient le même signe est *suffisante* pour que l'on puisse appliquer la méthode de Newton avec la certitude d'approcher davan-

tage de la racine, mais elle n'est pas *nécessaire*. Il peut arriver que $a + \alpha$ soit supérieur à $a + \alpha + \alpha_1$, et cependant plus près de $a + \alpha + \alpha_1$ que ne l'était a. Il arriverait alors qu'en appliquant la correction de Newton à la limite a, on dépasserait la racine, mais la nouvelle valeur $a + \alpha = b_1$ serait plus approchée que a, elle pourrait même être plus approchée que b. C'est l'incertitude qui pèserait sur $a + \alpha$ qui nous force à choisir celle des deux limites pour laquelle la correction a un sens bien déterminé.

II. Soit a la limite pour laquelle la correction de Newton est applicable avec certitude, c'est-à-dire pour laquelle $f(a)$, $f''(a)$ ont le même signe : on déduira de cette valeur a une autre, $a_1 = a + \alpha$, certainement plus approchée, et inférieure à x. La limite nouvelle a_1 pourra servir à en trouver une nouvelle, a_2, remplissant les mêmes conditions, car $f(a_1)$ et $f''(a_1)$ auront encore le même signe. Donc une fois que l'une des limites remplit la condition à laquelle nous l'avons assujettie, toutes celles qu'on en déduit en lui appliquant la méthode de Newton la remplissent aussi.

III. Pour cette limite, la correction ne peut jamais être en défaut, car si $f'(a)$ était nul, on aurait

$$0 = f(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h),$$

résultat absurde, puisque les deux termes ont le même signe.

IV. On peut démontrer qu'à l'aide des approximations successives que donne la méthode de Newton, on s'approche de la vraie racine autant qu'on le veut. Soient

$$a, \quad a_1, \quad a_2 \ldots, \quad a_n, \quad a_{n+1} \ldots,$$

les valeurs successives, toutes moindres que x, si l'on part de la limite inférieure, on a généralement la relation

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Or la différence $a_{n+1} - a_n$ diminue indéfiniment, puisque les nombres a_n augmentent toujours, sans atteindre x; d'ailleurs $f'(a_n)$ ne peut pas être infini, puisque $f'(x)$ est constamment croissante ou décroissante entre les limites a et b; donc $f(a_n)$ tend vers zéro; donc a_n a pour limite x.

V. La limite de l'erreur commise peut s'évaluer approximativement par la formule

$$\varepsilon = -\frac{\alpha^2 f''(a)}{2f'(a)} = \frac{(f)^2 f''}{2(f')^3},$$

dans laquelle α représente la dernière correction et a la dernière valeur obtenue. Le nombre donné par cette formule est, en général, compliqué; on le remplacera dans la pratique par la première puissance de $\frac{1}{10}$, auquel il est inférieur. On trouvera ainsi facilement la dernière décimale à laquelle on devra borner la division, d'où l'on tire α, par la formule

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

On devra aussi prendre ce quotient par défaut, afin d'être bien sûr de rester en deçà de la racine; ou au delà si l'on est parti de la limite supérieure b.

Application (*).

Soit à résoudre l'équation

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0,$$

(*) Nous avons cru qu'il était utile aux élèves d'ajouter à cette lumineuse exposition de la méthode de Newton une application numérique complétement développée. J. B.

prenons les dérivées successives

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 7,$$

$$\frac{1}{2}f''(x) = 3x - 3.$$

Formons le tableau des substitutions des nombres consécutifs :

x	f	f'	$\frac{1}{2}f''$
0	4	— 7	— 3
1	— 5	— 10	0
2	— 14	— 7	3
3	— 17	2	6
4	— 8	17	9
5	+ 19	38	12
0	4	— 7	— 3
— 1	7	2	— 6
— 2	— 2	17	9

Nous voyons que l'équation a trois racines réelles,

x_1 compris entre 0 et 1,
x_2 compris entre 4 et 5,
x_3 compris entre —1 et —2.

Calcul de x_1. — Cette racine est comprise entre 0 et 1; la seconde dérivée f'' s'annulant à l'une des limites, nous ne connaissons pas son signe, cherchons une approximation plus grande pour x. Nous allons substituer 0,5 à la place de x et savoir si cette limite est en deçà ou au delà de x.

Voici un procédé commode de calcul pour trouver $f(a+h)$, $f'(a+h)$,..., dont on a besoin dans l'application de la méthode de Newton. La formule de Taylor donne

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{2.3}f'''(a) + \ldots;$$

désignons simplement par f, f', f'', f''' les valeurs pour a de la fonction et de ses dérivées : nous formerons le tableau suivant le calcul qui s'explique lui-même :

f	......	......	......	....	f		
f'	hf'	......	......	....	hf'	f'	
f''	hf''	$\frac{1}{2} hf''$	$\frac{1}{2} h^2 f''$	....	$\frac{1}{2} h^2 f''$	hf''	f''
f'''	hf'''	$\frac{1}{2} hf'''$	$\frac{1}{2} h^2 f'''$	$\frac{1}{2.3} h^2 f'''$	$\frac{1}{2.3} h^3 f'''$	$\frac{1}{2} h^2 f'''$	hf'''
					$f(a+h)$	$f'(a+h)$	$f''(a+h)$

Appliquons ce procédé au calcul de $f(0,5), f'(0,5), f''(0,5), f'''(0,5)$, nous formerons le tableau suivant :

4	.....	.....	......	....	4,000			
−7	−3,5	.....	......	....	$\overline{16}$,500	13,00		
−6	−3,0	−1,5	−0,75	....	$\overline{1}$,250	$\overline{17}$,00	$\overline{14}$,0	
+6	3,0	1,5	0,75	0,25	0,125	0,75	3,0	6
					$\overline{19}$,875	$\overline{10}$,75	$\overline{17}$,0	6
					− 0,125	− 9,25	− 3,0	6
					$f(0,5)$	$f'(0,5)$	$f''(0,5)$	$f'''(0,5)$

Ce calcul montre que 0,5 est supérieur à la racine, et comme la fonction f et la seconde dérivée ont le même signe à cette limite, c'est à elle qu'il faut appliquer la correction de Newton. Or

$$\varepsilon = \frac{(0,125)^2 \times 3}{2 \times (9,25)^3} < \frac{0,0156 \times 3}{2 \times 729} < 0,0001;$$

donc la correction α se poussera jusqu'aux dix-millièmes

$$\alpha = \frac{0,125}{9,25} = 0,0135 \text{ par défaut};$$

par suite

$$b_1 = 0,5 - 0,0135 = 0,4865 \text{ par excès.}$$

Pour continuer, il faut calculer $f(b_1), f'(b_1), \ldots$; nous procédons comme précédemment :

−0,125					
−9,250	0,124 875				
−3,000	0,040 5	0,020 25	−0,000 273 375		
6,000	−0,081	−0,040 5	0,000 546 75	0,000 182 25	−0,000 002 460 375

$\bar{1},875$	$\bar{1}0,750$	
0,124 875	0,040 5	
$\bar{1}$ 726 625	0,000 546 75	$\bar{1}7,000$
$\bar{1}7$ 539 625		$\bar{1},919$
$\bar{1},999$ 599 164 625	$\bar{1}0,791$ 046 75	$\bar{1}6,919$
$f(b_1)$	$f'(b_1)$	$f''(b_1)$

Nous avons donc

$$\varepsilon = \frac{(0{,}000\,404)^2 \times 3{,}081}{2 \times (9{,}208)^3} < 0{,}000\,000\,001;$$

donc la correction α se calculera jusqu'à la neuvième décimale

$$\alpha = -\frac{0{,}000\,400\,835\,375}{9{,}208\,953\,25} = -0{,}000\,043\,526 \text{ par défaut;}$$

donc

$$b_2 = 0{,}486\,500\,000 - 0{,}000\,043\,526,$$

donc

$$x_1 = 0{,}486\,456\,474 \text{ par excès.}$$

Calcul de x_2. — Cette racine est comprise entre 4 et 5, et comme

$$\frac{f(5)}{f''(5)} = \frac{+19}{+24} > 0,$$

la correction de Newton est applicable dès le début ; voici sans explications le tableau des calculs :

1re *Correction.*

$$\varepsilon = \frac{19^2 \times 24}{2 \times 38^3} = \frac{19^2 \times 12}{8 \times 19^3} = \frac{6}{4 \times 19} < \frac{1}{4 \times 5} < 0{,}1,$$

$$\alpha = -\frac{19}{38} = -0{,}5,$$

$$b_1 = 5{,}0 - 0{,}5 = 4{,}5.$$

2ᵉ *Correction.*

19					
38	− 19				
24	− 12	− 6	3		
6	− 3	− 1,5	0,75	0,250	− 0,125

$f(4,5) = 19,000 + \bar{1}81,000 + 3,000 + \bar{1},875 = 002,875,$

$f'(4,5) = 38,00 + \bar{1}88,00 + 0,75 = 26,75,$

$f''(4,5) = 24 - 3 = 21,$

$f'''(4,5) = 6;$

$$\varepsilon = \frac{(2,875)^2 \times 21}{2 \times (26,75)^3} < \frac{174}{17676} < \frac{1}{100},$$

$$\alpha = -\frac{2,875}{26,75} = -0,10 \text{ par défaut},$$

$$b_2 = 4,50 - 0,10 = 4,40 \text{ par excès.}$$

3ᵉ *Correction.*

2,875					
26,75	− 2,675				
21	− 2,1	− 1,05	0,105		
6	− 0,6	− 0,3	0,03	0,010	0,001

$f(4,40) = 2,875 + \bar{1}7,325 + 0,105 + 0,0\bar{1}9 = 0,304,$

$f'(4,40) = 26,75 + \bar{1}7,90 + 0,03 = 24,68,$

$f''(4,40) = 21 - 0,6 = 20,4,$

$f'''(4,40) = 6;$

$$\varepsilon = \frac{(0,304)^2 \times 20,4}{2 \times (24,68)^3} < \frac{0,1 \times 10}{8 \times 1000} < 0,0001,$$

$$\alpha = -\frac{0,304}{24,68} = 0,0123 \text{ par défaut},$$

$$b_3 = 4,4000 - 0,0123 = 4,3877.$$

Bornons-nous à cette correction, nous avons, à moins de 0,0001,

$$r_2 = 4,3877.$$

Calcul de x_3. — Cette racine est négative, mais la méthode ne fait aucune distinction entre les racines positives et les racines négatives; nous pouvons donc lui appliquer la correction.

-2 est la limite inférieure,

-1 est la limite supérieure,

comme

$$\frac{f(-2)}{f''(-2)} = \frac{-2}{-18} > 0;$$

c'est à elle que nous appliquerons la correction. Voici le tableau des calculs :

1re *Correction.*

$$\varepsilon = \frac{4\times(-18)}{2\times 17^3} = -\frac{36}{4900} < -0{,}01,$$

$$\alpha = \frac{2}{17} = 0{,}11 \text{ par défaut},$$

$$a_1 = -2{,}00 + 0{,}11 = -1{,}89 \text{ par défaut.}$$

2e *Correction.*

2					
17	1,87				
18	−1,98	−0,99	−0,1089		
6	0,66	0,33	0,0363	0,0121	0,001331

$$f(-1{,}89) = \bar{1}8 + 1{,}87 + \bar{1}{,}8911 + 0{,}001331 = -0{,}237569,$$

$$f'(-1{,}89) = 17 + \bar{1}8{,}02 + 0{,}0363 = 15{,}0563,$$

$$f''(-1{,}89) = -18 + 0{,}66 = -17{,}34,$$

$$f'''(-\bar{1}{,}89) = 6;$$

$$\varepsilon = -\frac{(0{,}237569)^2\times 17{,}34}{2\times(15{,}0563)^3} < \frac{0{,}06\times 9}{3375} < \frac{1}{6000} < 0{,}001,$$

$$\alpha = \frac{0{,}237569}{15{,}0563} = 0{,}015 \text{ par défaut},$$

$$a_2 = -1{,}890 + 0{,}015 = -1{,}875 \text{ par défaut.}$$

On continuerait de même : on a donc, à moins de 0,001,

$$x_3 = 1,875.$$

NOTE SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE ;

Par M. SARTIAUX,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Si parmi les dix-huit points d'intersection d'une surface du troisième ordre avec les six arêtes d'un tétraèdre, six de ces points, pris chacun sur une arête, sont dans un même plan, les douze autres sont sur une même surface du second ordre.

Je prends en effet pour tétraèdre de référence le tétraèdre donné. Je puis, sans rien changer à la généralité de la question, disposer des quatre paramètres de référence de telle sorte que, si $P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$ est le plan qui contient les six points, l'équation de la surface soit

$$\begin{aligned} \alpha^3 x^3 + \beta^3 y^3 + \gamma^3 z^3 + \delta^3 t^3 + a x^2 y + a' x y^2 + b x^2 z + b' x z^2 \\ + c x^2 t + c' x t^2 + d y^2 z + d' y z^2 + e z^2 t + e' z t^2 + f y z t \\ + g x z t + h x y t + k x y z = 0. \end{aligned}$$

Cherchons l'intersection avec l'arête $z = 0$, $t = 0$, par exemple, on a

$$(1) \qquad \alpha^3 x^3 + \beta^3 y^3 + a x^2 y + a' x y^2 = 0.$$

L'un des points d'intersection étant sur le plan P, le premier membre de cette équation est divisible par $\alpha x + \beta y$; par suite, en posant $a = \lambda\alpha$, $a' = \lambda\beta$, elle s'écrira :

$$\begin{aligned} \alpha^3 x^3 + \beta^3 y^3 + \lambda(\alpha x + \beta y) x y \\ = (\alpha x + \beta y)\left[\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + x y(\lambda - \alpha\beta)\right] = 0. \end{aligned}$$

On peut faire des calculs analogues pour les autres arêtes, et il est évident que les douze points d'intersection non situés dans le plan P seront sur la surface du second ordre :

$$\begin{aligned}\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2r^2 + \delta^2t^2 + xy\,(\lambda - \alpha\beta) \\ + xr\,(\lambda_1 - \alpha\gamma) + xt\,(\lambda_2 - \alpha\delta) + yr\,(\lambda_3 - \beta\gamma) \\ + yt\,(\lambda_4 - \beta\delta) + zt\,(\lambda_2 - \gamma\delta) = 0,\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Supposons que quatre des arêtes formant un quadrilatère gauche soient osculatrices à la surface; soient

$$(2)\qquad \begin{cases} (z = 0, t = 0), & (x = 0, z = 0), \\ (x = 0, y = 0), & (y = 0, z = 0), \end{cases}$$

cela veut dire que

$$a = 3\alpha^2\beta, \quad a' = 3\alpha\beta^2, \text{ etc.}$$

Les quatre points sont donc complétement déterminés en ajoutant aux équations (2) les équations (1) transformées :

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y)^3 = 0, &\quad (\beta y + \delta t)^3 = 0, \\ (\gamma z + \delta t)^3 = 0, &\quad (\alpha x + \delta t)^3 = 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve que ces quatre points sont dans un même plan. Donc, quand un quadrilatère a ses côtés osculateurs d'une surface du troisième ordre, les points de contact sont dans un même plan. Si les six arêtes du tétraèdre sont osculatrices à la surface, il est facile de voir que les six points de contact sont dans un même plan. Étant donnée une surface quelconque du troisième ordre, on peut toujours trouver un tétraèdre dont les arêtes soient ainsi osculatrices à la surface. En effet, exprimer qu'une droite est osculatrice équivaut à deux conditions. Il faut donc douze conditions pour que les arêtes du tétraèdre soient osculatrices. Or il y a douze paramètres indéter-

minés dans les équations des faces du tétraèdre; donc le problème comporte un nombre déterminé de solutions. L'un de ces tétraèdres étant pris pour tétraèdre de référence, l'équation générale des surfaces du troisième ordre peut s'écrire :

$$(lx + my + nz + pt)^3 = \alpha yzt + \beta xzt + \gamma xyt + \delta xyz.$$

Elle renferme bien dix-neuf paramètres arbitraires distincts. Cette forme d'équation nous permet de donner immédiatement une propriété commune à toutes les surfaces du troisième ordre.

On donne un tétraèdre, un plan fixe et quatre directions fixes. Imaginons que l'on mène par un point quatre parallèles à ces directions fixes et qu'on les arrête chacune à une face du tétraèdre, ces obliques, prises trois à trois, forment quatre tétraèdres. *Le lieu des points tels, que la somme algébrique des volumes de ces tétraèdres, divisée par le cube de la distance de ces points à un plan fixe, reste constante est une surface du troisième ordre.*

M. de Jonquières a démontré dans les *Nouvelles Annales* (t. III, 2e série, p. 20) que : *La surface nodale d'une surface du troisième ordre passe par les points de contact des plans stationnaires de cette surface et leur est tangente en un autre point.* Avant de me servir de ce théorème, je vais donner de la première partie de ce théorème une démonstration géométrique assez simple.

Par un point O, on mène une sécante qui rencontre la surface aux trois points M_1, M_2, M_3; le lieu d'un point M défini par la relation

$$\sum_3 \left(\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_1}\right)\left(\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_2}\right) = 0$$

est la surface polaire du point O. La relation peut s'écrire :

$$MM_1 . MM_2 . OM_3 + MM_2 . MM_3 . OM_1 + MM_3 . MM_1 . OM_2 = 0.$$

Si le point O est sur la surface, il se confond avec le point M_1 par exemple, et la relation devient

$$MM_1 (MM_2 . M_1M_3 + MM_3 . M_1M_2) = 0 ; \; MM_1 = 0,$$

c'est-à-dire que la surface polaire passe par le point M_1; le second point situé sur la sécante est défini par la relation

$$MM_2 . M_1M_3 + MM_3 . M_1M_2 = 0.$$

Si la sécante devenait tangente à la surface alors

$$M_1M_2 = 0 ;$$

il en résulte

$$MM_2 = 0,$$

c'est-à-dire que la surface et la surface polaire ont même plan tangent. Si la sécante devient une des asymptotes de l'indicatrice, alors la position du point M est indéterminée sur la sécante, c'est-à-dire que la surface et la surface polaire ont au point O les mêmes asymptotes de l'indicatrice ; si la surface polaire, qui est du second ordre, est un cône, son plan tangent le coupe suivant deux droites confondues ; en ce point, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles : ce point est parabolique, ce qu'il fallait démontrer. Le plan tangent en ce point est tangent à la surface nodale, et le point de contact est sur la tangente inflexionnelle unique à la surface du troisième ordre. L'équation de la surface nodale de la surface du troisième ordre, dont l'équation est

$$u^3 - \alpha yzt - \beta xzt - \gamma xyt - \delta xyz = 0,$$

$$u = lx + my + nz + pt,$$

s'écrit :

$$\begin{vmatrix} 6l^2u & 6lmu - \delta z - \alpha t & 6lnu - \delta y - \beta t & 6lpu - \gamma y - \beta z \\ 6lmu - \delta z - \gamma t & 6m^2u & 6mnu - \delta x - \alpha t & 6mpu - \gamma x - \alpha z \\ 6lnu - \delta y - \beta t & 6mnu - \delta x - \alpha t & 6n^2u & 6npu - \beta x - \alpha y \\ 6lpu - \gamma y - \beta z & 6mpu - \gamma x - \alpha z & 6npu - \beta x - \alpha y & 6p^2u \end{vmatrix} = 0.$$

Son intersection avec la surface donne la courbe parabolique. Cherchons son intersection avec le plan $u = 0$, les points seront donnés par cette équation jointe aux deux équations :

$$\alpha yzt + \beta xzt + \gamma xyt + \delta xyz = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} 0 & \delta z + \gamma t & \delta y + \beta t & \gamma y - \beta z \\ \delta z + \gamma t & 0 & \delta x + \alpha t & \gamma x - \alpha z \\ \delta y + \beta t & \delta x + \alpha t & 0 & \beta x + \alpha y \\ \gamma y + \beta z & \gamma x + \alpha z & \beta x + \alpha y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière développée s'écrit :

$$\begin{aligned} &(\delta z + \gamma t)^2 (\beta x + \alpha y)^2 + (\gamma y + \beta z)^2 (\delta x + \alpha t)^2 \\ &\quad + (\gamma x + \alpha z)^2 (\delta y + \beta t)^2 \\ &\quad - 2(\beta x + \alpha y)(\delta z + \gamma t)(\gamma y + \beta z)(\delta x + ot) \\ &\quad - 2(\beta x + \alpha y)(\delta z + \gamma t)(\gamma x + \alpha z)(\delta y + \beta t) \\ &\quad - 2(\gamma y + \beta z)(\delta x + \alpha t)(\gamma x + \alpha z)(\delta y + \beta t) = 0. \end{aligned}$$

On peut développer cette équation et l'écrire :

$$\begin{aligned} 0 = \alpha yzt\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{t}{\delta}\right) + \beta xzt\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} + \frac{t}{\delta}\right) \\ + \gamma xyt\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{t}{\delta}\right) + \delta xyz\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right); \end{aligned}$$

et enfin on peut l'écrire :

$$\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{t}{\delta}\right)(\alpha yzt + \beta xzt + \gamma xyt + \delta xyz) - 4xyzt = 0.$$

Donc enfin les points sont donnés par l'intersection des trois surfaces :

$$u = 0, \quad xyzt = 0, \quad \alpha yzt + \beta xrt + \gamma xyt + \delta xyr = 0.$$

Ce sont les points où le tétraèdre de référence est osculateur à la surface; de plus, *le plan de ces six points de contact est tangent en ces points à la courbe parabolique*. En chacun de ces points, par exemple ($z = 0$, $t = 0$, $lx + my = 0$), le plan tangent à la surface du troisième ordre a pour équation $\delta z + \gamma t = 0$; il est facile de voir que ce plan est tangent à la surface nodale au point $z = 0$, $t = 0$, $lx - my = 0$; par suite, deux des sommets du tétraèdre et les deux points de contact du plan tangent commun à la surface du troisième ordre et à sa surface nodale forment un système harmonique.

SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1868;

Par M. MONTCOQ.

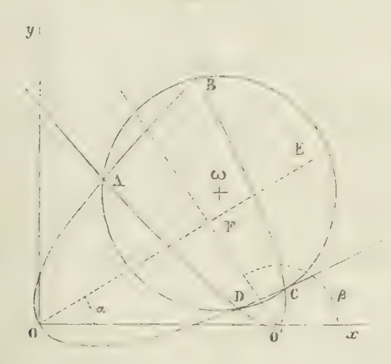
Je me propose de donner la solution du problème d'agrégation comme application facile d'un théorème sur les paraboles.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME.

Étant données dans un plan deux paraboles du deuxième degré, on les fait tourner autour de leurs sommets, supposés fixes, de manière que dans chacune de leurs positions, leurs quatre points d'intersection soient sur une circonférence, et l'on demande le lieu des centres de cette circonférence.

Soient (*fig.* 1) les deux paraboles BAODC, ADO'CB dans l'une des positions particulières répondant à la ques-

Fig. 1.



tion, x et y étant les coordonnées de l'un des points de la première avant sa rotation autour du sommet O, x' et y' ses coordonnées après avoir tourné de l'angle α; les formules de transformation sont

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

d'où

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,$$
$$y = y'\cos\alpha - x'\sin\alpha.$$

Si nous supposons que la deuxième, ayant d'abord son sommet en O, soit transportée parallèlement à elle-même de manière à avoir son sommet en O', OO' étant égal à a, et qu'elle tourne alors de l'angle β; x_1 et y_1 étant ses coordonnées primitives et x'' et y'' ses coordonnées après le double mouvement, les formules de transformation sont

$$x'' = a + x_1\cos\beta - y_1\sin\beta,$$
$$y'' = x_1\sin\beta + y_1\cos\beta;$$

d'où

$$x_1 = x''\cos\beta + y''\sin\beta - a\cos\beta,$$
$$y_1 = y''\cos\beta - x''\sin\beta + a\sin\beta.$$

L'équation de la première parabole avant sa rotation est

$$y^2 = 2px;$$

celle de la deuxième, avant son double mouvement,

$$y_1 = 2p'x_1;$$

l'équation de la parabole BAODC est donc

$$(y'\cos\alpha - x'\sin\alpha)^2 = 2p(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha)$$

ou

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & x'^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha \\ & \qquad - 2px'\cos\alpha - 2py'\sin\alpha = 0, \end{aligned}\right.$$

et celle de la parabole ADO'CB

$$(y''\cos\beta - x''\sin\beta + a\sin\beta)^2 = 2p'(x''\cos\beta + y''\sin\beta - a\cos\beta)$$

ou

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & x''^2\sin^2\beta + y''^2\cos^2\beta - 2x''y''\sin\beta\cos\beta \\ & \quad - 2x''(a\sin^2\beta + p'\cos^2\beta) \\ & \quad - 2y''(p'\sin\beta - a\sin\beta\cos\beta) \\ & \qquad + a^2\sin^2\beta + 2ap'\cos\beta = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous retranchons, membre à membre, l'équation (1) de l'équation (2) après avoir multiplié la première par λ et supprimé les accents, puisque les points d'intersection sont communs, il vient

$$\begin{aligned} & (\sin^2\beta - \lambda\sin^2\alpha)x^2 + (\cos^2\beta - \lambda\cos^2\alpha)y^2 \\ & \quad - (2\sin\beta\cos\beta - 2\lambda\sin\alpha\cos\alpha)xy \\ & \quad - 2(\alpha\sin^2\beta + p'\cos\beta - \lambda p\cos\alpha)x \\ & \quad - 2(p'\sin\beta - a\sin\beta\cos\beta - p\lambda\sin\alpha)y \\ & \qquad + a^2\sin^2\beta + 2ap'\cos\beta = 0. \end{aligned}$$

λ est indéterminé; nous pouvons donc le choisir de façon que l'équation représente une circonférence. Il suffit pour cela que le terme en xy soit nul et que les coefficients de x^2 et de y^2 soient égaux, donc $\lambda = -1$ et $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$; donc *les axes des paraboles sont rectangulaires*.

Si l'on fait $\lambda = -1$ et $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ dans la dernière équation, elle devient

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2(a\cos^2\alpha - p'\sin\alpha + p\cos\alpha)x \\ & \quad - 2(p'\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha + p\sin\alpha)y \\ & \qquad + a^2\cos\alpha^2 - 2ap'\sin\alpha = 0. \end{aligned} \right.$$

ξ et η étant les coordonnées du centre de cette circonférence, elle a aussi pour équation

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - R^2 = 0$$

ou

$$(4)\qquad x^2 + y^2 - \xi x - 2\eta y + \xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0.$$

Exprimant que les coefficients des équations (3) et (4) sont proportionnels, ou, simplement identifiant, puisque les coefficients des termes en x^2 et y^2 sont égaux à l'unité, on a

$$(5)\qquad \xi = a\cos^2\alpha - p'\sin\alpha + p\cos\alpha,$$

$$(6)\qquad \eta = p'\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha + p\sin\alpha,$$

pour les coordonnées du centre en fonction de α.

Il suffirait d'éliminer α entre ces deux équations pour obtenir l'équation du lieu cherché; mais la recherche de ce lieu peut se faire d'une façon simple, élégante en s'appuyant sur le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque deux paraboles tournant autour de leurs sommets sont telles, que leurs quatre points d'in-*

tersection soient sur une circonférence variable, le centre est à l'intersection des deux lignes droites distantes extérieurement de chaque sommet du paramètre de l'autre parabole.

En effet, l'axe de la première parabole, ou la droite OE passant par l'origine et faisant avec l'axe x un angle α, est

$$y - x \tang\alpha = 0;$$

par suite, ωF distance à cette droite du centre de la circonférence dont les coordonnées sont ξ et η est

$$d = \frac{p'\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha + p\sin\alpha - \tang\alpha(a\cos^2\alpha - p'\sin\alpha + p\cos\alpha)}{\sqrt{1 + \tang^2\alpha}} \quad (*)$$

ou

$$d = \frac{p'\cos^2\alpha + p'\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sqrt{1 + \tang^2\alpha}} = p'.$$

Ainsi, comme nous l'avons énoncé, p' est la distance du centre de la circonférence variable à l'axe de la parabole dont le paramètre est p. Avec la même facilité on trouvera que p est la distance du centre de la circonférence à l'axe de la parabole dont le paramètre est p', ce qui démontre le théorème.

Le problème est donc ramené à un cas particulier de celui-ci :

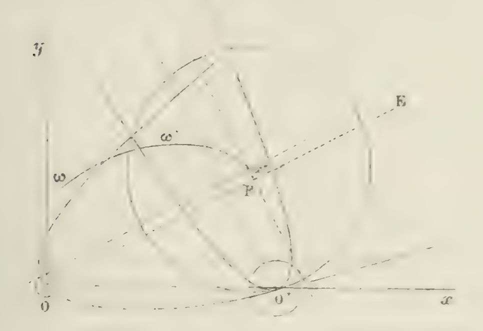
Quel est le lieu de l'intersection des tangentes à deux circonférences ayant pour centres O et O', et pour rayons respectifs p' et p, ces tangentes étant supposées toujours rectangulaires ?

C'est un cas particulier pour plusieurs raisons : d'abord,

(*) Nous prenons le radical avec le signe + pour que cette distance soit positive.

parce que si l'on veut avoir le problème d'agrégation, il ne faut prendre que les tangentes extérieures (*fig.* 2) : une


Fig. 2.



autre raison : ces tangentes extérieures donnent une courbe continue au-dessus et au-audessous de la droite qui joint les points O et O′, tandis que dans le problème d'agrégation, on ne cherche qu'une partie de cette courbe; le lieu des points satisfaisant à la question s'arrête brusquement en deux points dont chacun répond au maximum ou au minimum de la circonférence. Ainsi (*fig.* 2) $\omega\omega'\omega''$ représente, d'un côté de OO′, toute la courbe lieu des centres des circonférences. La courbe commence donc brusquement en ω, et s'arrête brusquement en ω''. Le premier point correspond au minimum de cette circonférence et le deuxième au maximum.

Le point ω'' correspond à la circonférence maxima. On obtient ce point en faisant passer, par le sommet de l'autre, un point de la parabole ayant *le plus grand paramètre*.

Il est évident que le lieu $\omega\omega'\omega''$ a son symétrique par rapport à OO′.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 845

(voir 2e série, t. VII, p. 96);

PAR M. LÉON BARBIER,
Élève au Lycée de Strasbourg.

On donne deux surfaces du second degré homofocales A *et* B; *par une droite* D *prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans tangents à cette surface. Soient b et b' les points où deux de ces plans tangents touchent la surface* B (*), *les droites ab, ab' sont dans le même plan que la normale en a à la surface* A, *et sont également inclinées sur cette normale.*

(LAGUERRE.)

On sait que le lieu du pôle d'un plan tangent à une surface du second degré par rapport aux surfaces homofocales est la normale au point de contact.

Le pôle, par rapport à la surface B, du plan déterminé par le point a et la droite D se trouve donc sur la normale aN menée par le point a à la surface A. D'un autre côté, ce pôle doit se trouver sur la droite bb' conjuguée de la droite D par rapport à la surface B. Par suite, les droites aN, bb' se coupent, et leur point de rencontre N est le pôle du plan tangent en a par rapport à la surface B.

Concevons maintenant un plan mené par la droite D,

(*) a le point où l'un des plans touche la surface A.

son point d'intersection avec la droite bb', et son pôle par rapport à la surface B, sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points b et b'. En particulier le point R où le plan tangent en a à la surface A coupe la droite bb', et son pôle N par rapport à la surface B, sont conjugués harmoniques par rapport aux points b, b'; or l'angle NaR est droit, donc la normale aN est la bissectrice de l'angle bab'.

On peut déduire immédiatement de ces deux propriétés quelques théorèmes connus.

Supposons que la droite D soit tangente à la surface A au point a; les plans tangents à la surface B menés par la droite D contiennent les droites ab, ab'; ces plans sont donc également inclinés sur le plan tangent au point a à la surface A. Ainsi, étant données deux surfaces homofocales A et B et une droite D tangente à la surface A, les plans tangents à la surface B menées par la droite D sont également inclinés sur le plan tangent à la surface A mené par la droite D.

Soient C une seconde surface homofocale avec A, et c, c' les points de contact des plans tangents menés par la droite D à cette surface, la normale aN rencontre cc'. Faisons maintenant varier la surface A, toutes les normales menées par les points de contact des plans tangents. menés aux surfaces A par la droite D, rencontreront les droites fixes cc', bb'; de plus, ces normales sont parallèles à un plan perpendiculaire à la droite D, donc elles engendrent un paraboloïde hyperbolique. Ce paraboloïde peut être considéré comme étant la surface engendrée par les droites conjuguées de la droite D par rapport aux surfaces homofocales à la surface A.

Voici une autre conséquence de la proposition démontrée.

La normale en a à la surface A rencontre la corde de

contact bb' et toutes les cordes analogues, lesquelles cordes sont les génératrices d'un même paraboloïde hyperbolique. Donc, si par une droite fixe on mène différents plans tangents à un système de surfaces du second degré homofocales, les normales menées aux points de contact sont les génératrices du second système de ce paraboloïde : théorème donné par M. Chasles (*Aperçu historique*, p. 398).

Question 864.

(voir 2e série, t. VII, p. 191);

Par M. KIEPERT,
Étudiant en Mathématiques, à Berlin.

Construire un triangle, connaissant les sommets des triangles équilatéraux construits sur les côtés.

(Lemoine.)

La solution ci-après donne lieu à une élégante construction.

Lemme I. — Si, sur les trois côtés d'un triangle quelconque ABC, on décrit des triangles équilatéraux ABC_1, ACB_1, BCA_1 les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont égales, se coupent en un même point, et les angles qu'elles forment entre elles sont égaux à 60 degrés.

Lemme II. — Les choses étant ainsi posées, si je fais sur $A_1 B_1 C_1$ la même construction faite sur ABC, j'aurai trois triangles équilatéraux $A_1 B_1 C_2$, $A_1 C_1 B_2$, $B_1 C_1 A_2$, les trois droites $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_1$ seront égales et se couperont aussi au point O; car, dans les deux cas, on obtiendra le point de rencontre de $A_1 A$, $B_1 B$, $C_1 C$, ou de $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, en décrivant sur $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, $B_1 C_1$

des segments capables de 120 degrés. Les points A_1, O, A, A_2 sont donc en ligne droite, ainsi que les points B_1, O, B, B_2 et C_1, O, C, C_2.

Lemme III. — Le point A est le milieu de $A_1 A_2$:
» B » $B_1 B_2$;
» C » $C_1 C_2$.

En effet, les quadrilatères inscriptibles $OBCA_1$, $OB_1C_1A_2$ donnent, en remarquant que le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés.

$$OA_1 = OB + OC \quad \text{et} \quad OA_2 = OB_1 + OC_1;$$

de même

$$OB_1 = OA + OC, \qquad OB_2 = OA_1 + OC_1,$$
$$OC_1 = OA + OB, \qquad OC_2 = OA_1 + OB_1,$$

d'où

$$AA_1 = OA + OA_1 = OA + OB + OC,$$
$$AA_2 = OA_1 + OA_2 = OA_1 + OB_1 + OC_1.$$

Mais on a

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = 2(OA + OB + OC).$$

Donc

$$AA_2 = 2AA_1.$$

(C. Q. F. D.)

De là résulte la construction suivante :

Sur $A_1 B_1$ décrivez le triangle équilatéral $A_1 B_1 C_2$,
» $A_1 C_1$ » » $A_1 C_1 B_2$,
» $B_1 C_1$ » » $B_1 C_1 A_2$.

Les milieux de $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ sont les sommets A, B, C du triangle cherché.

L'auteur démontre ensuite le théorème suivant par des considérations empruntées à la géométrie analytique :

1° Si sur les côtés AB, CA, BC d'un triangle on construit des triangles isocèles semblables ABC_1, ACB_1,

CBA_1, les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au même point ;

2° Le lieu de ce point est une conique si l'angle à la base des triangles isocèles varie.

L'équation de cette conique, les axes étant rectangulaires, est

$$\frac{\sin(A-B)}{\gamma} + \frac{\sin(C-A)}{\beta} + \frac{\sin(B-C)}{\alpha} = 0,$$

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, représentant les équations des trois côtés BC, AC, AB prises sous la forme

$$\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha - p = 0,$$

et A, B, C les angles du triangle.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Willière, professeur à Arlon; Brocard, sous-lieutenant du Génie; Claverie, du lycée de Clermont (classe de M. Lafon); Joffre, du lycée Charlemagne (institution Harant); Racine, du lycée de Poitiers; Augier, du lycée de Caen; Niebylowski; L. Henri Lorrez.

Toutes ces solutions sont simples, mais moins complètes que celle de M. Kiepert que nous avons résumée.

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4};$$

PAR M. JOSEPH JOFFROY,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit $ADM = a$ l'arc considéré moindre que π (*). Le secteur AOM est exprimé par $\frac{a}{2}$, le triangle AOMC est

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

exprimé par $\frac{1}{2}\sin a$: donc

$$a - \sin a$$

représente le double de l'aire du segment MDAC. Remarquons que le rectangle $\overline{\mathrm{MA}}.\overline{\mathrm{CD}}$ est supérieur au segment de cercle, donc

$$a - \sin a < 2\,\overline{\mathrm{MA}}.\mathrm{CD};$$

de là nous tirons

$$\begin{aligned} a - \sin a &< 2 \times 2 \sin\frac{a}{2}\left(1 - \cos\frac{a}{2}\right) \\ &< 8 \sin\frac{a}{2}\sin^2\frac{a}{4} \\ &< 8\,\frac{a}{2}\,\frac{a^2}{4^2} \\ &< \frac{a^3}{4}. \end{aligned}$$

Cette démonstration, en grande partie géométrique, nous paraît plus facile à comprendre et à retenir que la démonstration classique.

BIBLIOGRAPHIE.

Les derniers numéros du *Bulletin de la Société Philomathique* renferment les Notes suivantes relatives à la Géométrie et à l'Analyse.

1867.

ABEL TRANSON. — *Sur les systèmes de coniques assujetties à quatre conditions.*

LAGUERRE. — *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes.*

LAGUERRE. — *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère avec une surface du deuxième degré.*

PICARD. — *Sur les réseaux isométriques et la déformation des surfaces de révolution.*

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — *Sur les centres de gravité.*

LAGUERRE. — *Sur les applications de la Géométrie au calcul intégral.*

DE SAINT-VENANT. — *Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques.*

GILBERT. — *Sur quelques propriétés relatives à la courbure des surfaces.*

AOUST (l'Abbé). — *Sur la courbure des surfaces.*

HORVATH. — *Sur les valeurs approximatives et rationnelles des radicaux de la forme* $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *et* $\sqrt{x^2 + y^2}$.

1868.

GILBERT. — *Sur la courbure des surfaces.*

LAGUERRE. — *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques.*

AOUST (l'Abbé). — *Sur un principe de la théorie des surfaces.*

RIBAUCOUR. — *Sur les courbes enveloppes de cercle et sur les surfaces enveloppes de sphères.*

LAGUERRE. — *Sur les Cassiniennes planes et sphériques.*

LAGUERRE. — *Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques.*

MANNHEIM. — *Sur le déplacement d'une figure de forme invariable.*

QUESTIONS.

898. On donne un cercle C tangent à une droite D en O. D'un point M de la circonférence on mène MA perpendiculaire à D, et l'on prend AB = AO. On joint BM, et l'on demande l'enveloppe de la droite BM quand le point M se déplace sur la circonférence. L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables. (H. Brocard.)

899. Deux disques situés dans le même plan et ayant la forme d'ellipses égales sont mobiles chacun autour d'un de leurs foyers supposé fixe; ces disques restent constamment tangents l'un à l'autre. On demande le lieu décrit par le point de contact. (Dauplay.)

900. Une ellipse donnée se meut à l'intérieur d'une parabole fixe donnée de manière à toucher cette parabole en deux points. On demande le lieu décrit par le centre de l'ellipse mobile et l'enveloppe de la droite qui passe par les deux points de contact. (Dauplay.)

901. Lorsqu'une ellipse en roulant sans glisser sur une droite a fait un tour entier, l'arc décrit par le foyer est égal à la circonférence ayant pour diamètre le grand axe.

902. Tout cube parfait augmenté de 3, 4 ou 5 unités d'un ordre quelconque n'est pas un cube parfait.

(Jos. Joffroy.)

903. Si par le milieu de chaque arête d'un tétraèdre on fait passer un plan perpendiculaire à l'arête opposée, les six plans ainsi obtenus passent par un même point. (M.)

904. Étant donné un faisceau de surfaces du second degré ayant même intersection, si par un point A pris sur une de ces surfaces, on mène une section plane normale à cette surface, et les demi-diamètres des autres surfaces parallèles à la tangente à la section au point A, ainsi que les plans polaires de ce point par rapport à ces surfaces; si l'on prend, à partir du point A et dans la direction des normales à ces plans polaires, des troisièmes proportionnelles aux demi-diamètres et aux distances correspondantes des plans polaires aux centres des surfaces, les extrémités de ces droites et le centre de courbure de la section faite dans la première surface sont en ligne droite. (L'Abbé Aoust.)

905. On donne une ellipse et ses deux foyers F et G: deux droites touchent cette ellipse aux points M et N, et se coupent en T : démontrer la relation

$$\frac{\overline{TF}^2}{MF.NF} = \frac{\overline{TG}^2}{MG.NG}.$$

(Laguerre.)

906. On donne une ellipse et une hyperbole homofocales dont O est le centre commun. Par un point quelconque P de l'hyperbole, on mène des droites parallèles aux normales à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole; soient H et K les points où ces droites coupent l'hyperbole et I le point milieu du segment HK : démontrer que les deux droites OP et OI sont également inclinées sur le grand axe, et que le rapport de OP à OI est constant. (Laguerre.)

907. Mêmes données. Par les trois points P, H et K, on fait passer un cercle, et sur ce cercle on prend le point P′, conjugué harmonique du point P relativement aux deux points H et K: démontrer que la perpendicu-

laire élevée sur le milieu de PP′ est la polaire du point P relativement à l'ellipse. (LAGUERRE.)

908. Soit un quadrilatère inscriptible ABCD. Si je considère un triangle formé par trois sommets de ce quadrilatère, les pieds des perpendiculaires abaissées du quatrième sommet sur les côtés du triangle considéré sont sur une ligne droite XY.

Cela posé, démontrer :

1° Que les quatre droites XY, que l'on peut construire en groupant trois à trois les quatre sommets ABCD, se coupent au même point K;

2° Que ce point est un point commun aux quatre cercles des neufs points des quatre triangles, et que, par suite, si un sommet se meut sur la circonférence circonscrite au triangle formé par les trois autres, le lieu du point C sera le cercle des neuf points de ce triangle.

(E. LEMOINE.)

909. Un ellipsoïde de grandeur donnée est tangent aux trois faces d'un angle trièdre trirectangle. Trouver la courbe qui limite la position possible d'un point de contact sur une des faces. (E. LEMOINE.)

910. Deux triangles OAB, OA′B′ ont un sommet commun: OAB est donné en grandeur et en position; OA′B′ en grandeur seulement. Placer OA′B′ de façon que les droites AA′, BB′ fassent entre elles un angle donné.

(E. LEMOINE.)

911. Si deux coniques de forme invariable se déplacent de manière que leurs quatre axes restent respectivement tangents à quatre cercles, et de manière que les points d'intersection des deux coniques soient sur un cercle, quel est le lieu des centres de ce cercle?

(DARBOUX.)

912. Le plus petit commun multiple m de n nombres entiers $a, b, c, \ldots, k, l$ est égal au quotient de leur produit P par le plus grand commun diviseur D des produits, $n-1$ à $n-1$ de ces n nombres. (Le Besgue.)

913. Le plus grand commun diviseur D de n nombres entiers $a, b, c, \ldots, k, l$ est égal au quotient de leur produit P par le plus petit commun multiple m des produits, $n-1$ à $n-1$, de ces n nombres.

(Le Besgue.)

914. La formule $ax+b$, où a et b sont premiers entre eux, ne renferme que des nombres premiers à m, si tous les diviseurs premiers de m divisent a. Mais, si m a des diviseurs premiers $p, q, r, \ldots$, qui ne divisent pas a, sur m nombres consécutifs compris dans $ax+b$, en posant

$$x = \alpha,\ \alpha+1, \ldots,\ \alpha+m-1,$$

il y aura

$$m\frac{p-1}{p}\frac{q-1}{q}\frac{r-1}{r}\cdots$$

nombres premiers à m. (Le Besgue.)

915. Étant donné un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$, déterminer la position d'un point $A_0(x_0 y_0)$ dont les coordonnées satisfont aux équations :

$$y_0 - ny_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}y_2 - \ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.2}y_{n-2} \mp ny_{n-1} \pm y_n = 0,$$

$$x_0 - nx_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}x_2 - \ldots \mp nx_{n-1} \pm x_n = 0.$$

Démontrer par le calcul et la géométrie que la position de ce point est indépendante du choix des axes de coordonnées. (A. Sartiaux.)

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(suite, voir 2e série, t. VII, p. 137),

PAR M. L. PAINVIN.

§ V. — *L'équation en λ a trois racines égales.*

21. Lorsque l'équation en λ a trois racines égales, trois cas peuvent se présenter :

PREMIER CAS. — *Le cône correspondant à la racine triple est un cône proprement dit.*

Les deux surfaces se touchent alors en un point; la courbe d'intersection est une courbe gauche du quatrième ordre ayant un point double de rebroussement au point de contact; la réciproque est vraie.

Le cône correspondant à la racine triple a son sommet au point de contact A *des deux surfaces, et touche suivant une droite* AB *le plan tangent commun; la droite* AB *est la tangente de rebroussement de la courbe gauche.*

Le cône correspondant à la racine simple a son sommet C *sur le plan tangent commun, et il touche aussi ce plan suivant une droite* CA *passant par le point* A.

Les sommets des deux cônes sont les seuls points qui aient même plan polaire par rapport aux deux surfaces; le sommet A *a pour plan polaire le plan tangent commun* BAC; *le sommet* C *a pour plan polaire un plan* BAD *passant par la droite* AB, *et qui est en même*

temps le plan polaire de la droite AC *par rapport au cône* (A).

Un plan quelconque passant par la tangente AB *de rebroussement coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices; le contact est du second ordre.*

Les pôles d'un plan quelconque passant par AB *sont distincts par rapport à chacune des surfaces, et se meuvent sur la droite* AC, *et inversement.*

Deuxième cas. — *Le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans distincts.*

Les deux surfaces se coupent alors suivant deux courbes planes, et ces deux courbes planes se touchent: les deux surfaces se touchent en un point unique, qui est le point de contact des courbes planes; la réciproque est vraie.

Tous les points de l'intersection AB *des plans* ABC *et* ABD *des deux courbes planes ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; tous ces plans tournent autour d'une droite fixe* AS, *située dans le plan tangent commun aux deux surfaces;* A *est le point de contact.*

Le sommet S *du cône correspondant à la racine simple se trouve sur la droite* AS; *ce sommet* S *a même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ce plan passe par la droite* AB, *et forme avec le plan tangent commun un système harmonique par rapport aux plans des deux courbes communes.*

Les pôles d'un plan tournant autour de AB *sont distincts par rapport à chacune des surfaces, et se meuvent sur* AS, *et inversement.*

Un plan quelconque passant par la droite AB, *intersection des plans des deux courbes communes, coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices: le contact est du troisième ordre.*

TROISIÈME CAS. — *Le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans coïncidents.*

Lorsque l'équation en λ a une racine triple, et que le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans coïncidents, les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre ; la courbe de contact est une courbe plane.

Le cône correspondant à la racine simple est circonscrit à chacune des surfaces suivant cette même courbe.

Réciproquement : *Si deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre suivant une conique proprement dite, l'équation en λ a une racine triple, et le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans coïncidents.*

Les points qui ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces sont : d'une part, tous les points du plan de la courbe de contact ; d'autre part, le sommet du cône correspondant à la racine simple.

Les plans polaires des premiers points passent par le sommet du cône ; le plan polaire du sommet de ce cône est le plan de la courbe de contact.

I. *Le cône correspondant à la racine triple est un cône proprement dit.*

22. Je prendrai pour sommet A du tétraèdre de référence, le sommet du cône correspondant à la racine triple ; comme le cône en question est un cône proprement dit, il résulte d'abord de l'analyse du n° 16 [relations (1°) et (2°)], que les équations des deux surfaces se présentent sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(S)\quad A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ &(T)\quad B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2\frac{A_{12}}{\lambda_0}xy + 2\frac{A_{13}}{\lambda_0}xz \\ &\qquad + 2\frac{A_{14}}{\lambda_0}xt + 2B_{23}yz + 2B_{24}yt + 2B_{34}zt = 0. \end{aligned}\right.$$

Les deux surfaces passent par le sommet A, et elles ont en ce point même plan tangent ; l'équation de ce plan est

$$A_{12}\,y + A_{13}\,z + A_{14}\,t = 0\,;$$

prenons ce plan pour face ABC du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0,$$

et les équations des deux surfaces pourront s'écrire :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(S)\quad A_{22}\,y^2 + A_{33}\,z^2 + A_{44}\,t^2 + 2xt \\ &\qquad\quad + 2A_{23}\,yz + 2A_{24}\,yt + 2A_{34}\,zt = 0, \\ &(T)\quad B_{22}\,y^2 + B_{33}\,z^2 + B_{44}\,t^2 + 2xt \\ &\qquad\quad + 2B_{23}\,yz + 2B_{24}\,yt + 2B_{34}\,zt = 0, \end{aligned}\right.$$

car le coefficient de xt ne peut être nul, autrement on aurait deux cônes ayant même sommet, et l'équation en λ se réduirait à une identité.

Dans le cas des équations (2), l'équation en λ est

$$(3)\quad (\lambda + 1)^2[(B_{22} + \lambda A_{22})(B_{33} + \lambda A_{33}) - (B_{23} + \lambda A_{23})^2] = 0\,;$$

et le cône correspondant à la racine $\lambda = -1$ aura pour équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(A_{22} - B_{22})\,y^2 + (A_{33} - B_{33})\,z^2 + (A_{44} - B_{44})\,t^2 \\ &\quad + 2(A_{23} - B_{23})yz + 2(A_{24} - B_{24})yt + 2(A_{34} - B_{34})zt = 0. \end{aligned}\right.$$

Écrivons maintenant que l'équation (3) a trois racines égales à -1, il vient

$$(5)\qquad (A_{22} - B_{22})(A_{33} - B_{33}) - (A_{23} - B_{23})^2 = 0.$$

Or l'équation de condition (5) exprime que le cône (4) touche le plan ABC ou $t = 0$; l'arête de contact est

$$(6)\qquad t = 0, \quad (A_{22} - B_{22})\,y + (A_{23} - B_{23})\,z = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6\ bis)\qquad t=0,\quad (A_{23}-B_{23})y+(A_{33}-B_{33})z=0.$$

La génératrice de contact passe par le sommet A; prenons-la pour arête AB du tétraèdre de référence, nous devrons faire

$$A_{22}-B_{22}=0,\quad \text{d'où}\quad A_{23}-B_{23}=0.$$

Les équations (2) des deux surfaces deviennent alors

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&(S)\quad A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2+2A_{23}yz\\&\qquad\qquad+2A_{24}yt+2A_{34}zt+2xt=0,\\&(T)\quad A_{22}y^2+B_{33}z^2+B_{44}t^2+2A_{23}yz\\&\qquad\qquad+2B_{24}yt+2B_{34}zt+2xt=0;\end{aligned}\right.$$

l'équation en λ est

$$(8)\qquad (\lambda+1)^3\left[A_{22}(B_{33}+\lambda A_{33})-A_{23}^2(\lambda+1)\right]=0;$$

et le cône correspondant à la racine triple aura pour équation

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&(A_{33}-B_{33})z^2+(A_{44}-B_{44})t^2\\&\quad+2(A_{24}-B_{24})yt+2(A_{34}-B_{34})zt=0.\end{aligned}\right.$$

Si λ_1 est la racine simple, l'équation du cône correspondant sera

$$\begin{aligned}&A_{22}(\lambda_1+1)y^2+(B_{33}+\lambda_1A_{33})z^2+(B_{44}+\lambda_1A_{44})t^2\\&\quad+2A_{23}(\lambda_1+1)yz+2(B_{24}+\lambda_1A_{24})yt\\&\qquad\qquad+2(B_{34}+\lambda_1A_{34})zt+2(\lambda_1+1)xt=0;\end{aligned}$$

et, en remarquant que, d'après l'équation (8),

$$\frac{B_{33}+\lambda_1A_{33}}{\lambda_1+1}=\frac{A_{23}^2}{A_{22}},$$

cette dernière équation peut s'écrire

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} & A_{22} y^2 + \frac{A_{23}^2}{A_{22}} z^2 + 2 A_{23} yz + 2xt + \frac{B_{44} + \lambda_1 A_{44}}{\lambda_1 + 1} t^2 \\ & \qquad + 2 \frac{B_{24} + \lambda_1 A_{24}}{\lambda_1 + 1} yt + 2 \frac{B_{34} + \lambda_1 A_{34}}{\lambda_1 + 1} zt = 0. \end{aligned} \right.$$

On ne peut pas supposer $B_{33} - A_{33} = 0$, car autrement l'équation en λ (8) admettrait quatre racines égales.

Remarquons maintenant que le sommet du cône (10) est dans le plan ABC ou $t = 0$; car si l'on fait $t = 0$ dans cette équation, on trouve

$$(A_{22} y + A_{23} z)^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le cône correspondant à la racine simple touche le plan tangent commun aux deux surfaces ; la génératrice de contact passe par le sommet A, et ne peut pas se confondre avec la droite AB, car il faudrait pour cela que l'on eût $A_{22} = 0$, et l'équation (8) admettrait alors quatre racines égales.

Nous pouvons donc prendre cette génératrice de contact pour arête AC du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$(11)\qquad A_{23} = 0,$$

et prendre, en même temps, pour sommet C, le sommet du cône (10), c'est-à-dire écrire que l'équation (10) ne renferme pas de termes en z, ce qui donne, outre la relation (11),

$$B_{34} + \lambda_1 A_{34} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = -\frac{B_{34}}{A_{34}}.$$

Cette valeur de λ_1 doit annuler le second facteur de l'équation (8), on aura donc

$$(12)\qquad B_{33} A_{34} - B_{34} A_{33} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{B_{33}}{A_{33}} = \frac{B_{34}}{A_{34}} = -\lambda_1.$$

La droite AC n'appartient pas au cône (9), car il faudrait pour cela que l'on eût $B_{33} = A_{33}$, ce qui ne peut avoir lieu comme on l'a vu; il résulte de là que, par la droite AC, on peut mener deux plans tangents au cône (9); l'un d'eux sera le plan CAB qui le touche suivant AB; prenons le second plan tangent pour face CAD du tétraèdre de référence. D'après cela, en faisant $y = 0$ dans l'équation (9), on devra trouver un carré parfait; par suite

$$(13) \qquad (B_{33} - A_{33})(B_{44} - A_{44}) = (B_{34} - A_{34})^2;$$

et le plan des génératrices de contact sera

$$(14) \qquad (B_{33} - A_{33})z + (B_{34} - A_{34})t = 0.$$

Le plan (14) passe par la droite AB, on peut le prendre pour face BAD, c'est-à-dire supposer

$$(15) \qquad B_{34} - A_{34} = 0, \quad \text{d'où} \quad B_{44} - A_{44} = 0.$$

Si l'on compare ces relations à l'égalité (12), et si l'on remarque que λ_1 est différent de -1, on conclut de là

$$(16) \qquad A_{34} = 0, \quad B_{34} = 0.$$

Eu égard aux relations (11), (15) et (16), les équations (7) des deux surfaces deviennent

$$(17) \quad \begin{cases} (S) & A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{24}yt + 2xt = 0, \\ (T) & A_{22}y^2 - \lambda_1 A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2B_{24}yt + 2xt = 0; \end{cases}$$

et le cône correspondant à la racine simple aura pour équation

$$(18) \qquad A_{22}y^2 + A_{44}t^2 + 2xt + 2\frac{B_{24} + \lambda_1 A_{24}}{\lambda_1 + 1}yt = 0.$$

Les trois arêtes AB, AC, AD du tétraèdre de référence sont maintenant déterminées, le sommet C est également

choisi; il ne reste plus d'arbitraires que les sommets B et D sur les arêtes respectives AB et AD.

L'équation (18) représente aussi la trace du cône correspondant à la racine simple sur le plan BAD, cette conique touche la droite AB au point A; la droite AD rencontre la conique en un second point défini par les équations

$$y = 0, \quad A_{44}t + 2x = 0;$$

nous prendrons ce point pour sommet D, c'est-à-dire que nous supposerons

$$A_{44} = 0.$$

Enfin nous choisirons pour sommet B le point où la tangente en D vient rencontrer la droite AB; pour cela, il faut exprimer que la polaire du point B ($x_0 = 0$, $t_0 = 0$), c'est-à-dire

$$A_{22}y + \frac{B_{24} + \lambda_1 A_{24}}{\lambda_1 + 1} t = 0,$$

se confond avec AD ou $y = 0$; on a ainsi

$$B_{24} + \lambda_1 A_{24} = 0.$$

Les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(19) \quad \begin{cases} (S) & A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{24}yt + 2xt = 0, \\ (T) & A_{22}y^2 - \lambda_1 A_{33}z^2 - 2\lambda_1 A_{24}yt + 2xt = 0. \end{cases}$$

On voit ainsi que :

« Si l'équation en λ a trois racines égales, et que le
» cône correspondant à la racine triple soit un cône pro-
» prement dit, les deux surfaces se touchent en un point
» unique A; le cône correspondant à la racine triple a
» son sommet au point de contact A, et touche le plan
» tangent commun; le cône correspondant à la racine
» simple a son sommet dans le plan tangent commun, et

» le touche ainsi suivant une droite qui passe par le » point A. »

Par la discussion qui précède, on voit que si l'on prend : pour sommet A du tétraèdre de référence, le sommet du cône correspondant à la racine triple, c'est-à-dire le point de contact des deux surfaces ; pour face BAC, le plan tangent commun ; pour arête AB, la génératrice de contact du cône (A) avec le plan BAC ; pour sommet C, celui du cône correspondant à la racine simple ; pour face CAD, le second plan tangent mené par CA au cône (A) ; pour face BAD, le plan des arêtes de contact ; pour sommet D, le point où la droite AD vient rencontrer la trace du cône (C) sur le plan BAD ; et enfin, pour sommet B, le point où la tangente en D vient rencontrer la droite AB, *les équations des deux surfaces pourront se ramener à la forme définitive*

$$(20)\quad \begin{cases} (\mathrm{S}) & ay^2 + 2xt + bz^2 + 2cyt = 0, \\ (\mathrm{T}) & k(ay^2 + 2xt) + bz^2 + 2cyt = 0. \end{cases}$$

L'équation du cône correspondant à la racine triple est alors

$$(21)\qquad (\mathrm{A})\quad bz^2 + 2cyt = 0;$$

celle du cône correspondant à la racine simple est

$$(22)\qquad (\mathrm{C})\quad ay^2 + 2xt = 0;$$

quant à l'équation en λ, elle est, dans le cas actuel,

$$(23)\qquad (\lambda + k)^3(\lambda + 1) = 0.$$

23. A l'aide des équations (20), l'étude des propriétés communes aux deux surfaces devient extrêmement facile.

Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) par rapport aux surfaces (20) sont

$$(24)\quad \begin{cases} x_0 t + y_0(ay + ct) + bz_0 z + t_0(x + cy) = 0, \\ kx_0 t + y_0(kay + ct) + bz_0 z + t_0(kx + cy) = 0. \end{cases}$$

On constate alors que :

« Les sommets A et C des deux cônes sont les seuls
» points qui ont même plan polaire par rapport aux deux
» surfaces ; le sommet A a pour plan polaire le plan tan-
» gent commun BAC ; le sommet C a pour plan polaire
» le plan BAD, lequel est le plan polaire de AC par rap-
» port au cône (A). »

Les coordonnées du pôle d'un plan

$$Mx + Ny + Pz + Qt = 0$$

sont données par les équations

$$\frac{t_0}{M} = \frac{ay_0 + ct_0}{N} = \frac{bz_0}{P} = \frac{x_0 + cy_0}{Q}, \quad \text{pour la 1}^{\text{re}} \text{ surface,}$$

$$\frac{kt_0}{M} = \frac{kay_0 + ct_0}{N} = \frac{bz_0}{P} = \frac{kx_0 + cy_0}{Q}, \quad \text{pour la 2}^{\text{e}} \text{ surface.}$$

On déduira de là que :

« Les pôles d'un plan quelconque passant par AB sont
» distincts par rapport à chacune des surfaces, et se meu-
» vent sur la droite AC, et inversement. »

24. Nous allons enfin démontrer que :

« Les deux surfaces (20) se coupent suivant une courbe
» du quatrième ordre ayant un point double au point A
» où les deux surfaces se touchent ; ce point double est
» un point de rebroussement ; la tangente de rebrous-
» sement est l'arête de contact du plan tangent com-
» mun ABC avec le cône (A) correspondant à la racine
» triple. Un plan quelconque passant par la tangente
» de rebroussement AB coupe les deux surfaces suivant
» deux coniques osculatrices ; le contact est du second or-
» dre. »

En effet, un plan quelconque passant par le point A coupe les deux surfaces (20) suivant deux courbes qui se

touchent en A : le point A est donc un point double de la courbe d'intersection. Les tangentes sont données par les intersections du cône (A) (21) avec le plan tangent commun $t = 0$; ces deux tangentes coïncident avec AB : la démonstration se fera comme au n° 18.

Un plan quelconque passant par AB,

$$z = \alpha t,$$

coupe les surfaces (20) suivant des courbes respectivement situées sur les deux cônes

$$(25)\quad \begin{cases} ay^2 + 2xt + \alpha^2 bt^2 + 2cyt = 0, \\ k(ay^2 + 2xt) + \alpha^2 bt^2 + 2cyt = 0. \end{cases}$$

Assimilant ces équations à celles de deux coniques, on voit que l'équation en μ correspondant aux sécantes communes est

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & k+\mu \\ 0 & a(k+\mu) & c(1+\mu) \\ k+\mu & c(1+\mu) & \alpha^2 b(1+\mu) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad (k+\mu)^3 = 0;$$

cette équation a une racine triple, et comme le système des sécantes communes correspondant à cette racine triple se compose de deux droites distinctes, il en résulte que les deux coniques sont osculatrices, et que le contact est du second ordre; il en est donc de même des cônes (25), ce qui démontre la proposition énoncée.

Réciproquement : « Lorsque deux surfaces du second » ordre se touchent en un point, et que la courbe d'in» tersection a un point de rebroussement en ce point de » contact, l'équation en λ a trois racines égales, et le » cône correspondant à la racine triple est un cône pro» prement dit. »

On démontrera facilement cette réciproque, en pre-

nant le plan tangent commun pour plan des xy), par exemple le point de contact pour origine, et la tangente de rebroussement pour axe des x.

II. *Le cône correspondant à la racine triple se compose de deux plans distincts.*

25. Je choisirai ces deux plans comme faces ABC et ABD du tétraèdre de référence ; d'après l'analyse faite au commencement du n° 19, on en conclura que les équations des deux surfaces sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2B_{34}zt = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'équation en λ sera

$$(2)\quad (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}(\lambda+1) & A_{41}(\lambda+1) \\ A_{12} & A_{22} & A_{32}(\lambda+1) & A_{42}(\lambda+1) \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}(\lambda+1) & B_{43}+\lambda A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & B_{34}+\lambda A_{34} & A_{44}(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut exprimer que la racine -1 est triple, c'est-à-dire que le second facteur du produit (2) s'annule pour $\lambda = -1$; on trouve ainsi

$$(B_{34} - A_{34})^2 (A_{11}A_{22} - A_{12}^2) = 0 ;$$

on ne peut pas supposer $A_{34} = B_{34}$, car alors les deux surfaces (1) coïncideraient ; il reste donc

$$(3)\qquad A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0.$$

Mais si nous cherchons l'intersection de la droite AB ($z = 0$, $t = 0$) avec les deux surfaces (1), nous avons

$$(4)\qquad A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = 0 ;$$

la relation (3) exprime que les points déterminés par l'équation (4) sont confondus. Prenons ce point pour sommet A du tétraèdre de référence, ce qui revient à supposer

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0;$$

les équations des deux surfaces seront maintenant

$$(5) \quad \begin{cases} A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt \\ \qquad + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt \\ \qquad + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2B_{34}zt = 0. \end{cases}$$

Le plan tangent en A a pour équation $f'_x = 0$, c'est-à-dire

$$(6) \qquad A_{13}z + A_{14}t = 0;$$

ce plan touche donc à la fois les deux surfaces, et il passe par la droite AB, intersection des plans correspondant à la racine triple.

L'équation du plan polaire d'un point quelconque situé sur la droite AB (x_0, y_0, $z_0 = 0$, $t_0 = 0$) est

$$(7) \qquad x_0(A_{13}z + A_{14}t) + y_0(A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t) = 0.$$

On voit par là que

« Le plan polaire d'un point quelconque situé sur la » droite AB est le même pour les deux surfaces ; ces » plans polaires passent par une droite fixe AS, qui est » l'intersection des deux plans

$$(8) \qquad \begin{cases} A_{13}z + A_{14}t = 0, \\ A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t = 0. \end{cases}$$

Le premier de ces plans est le plan tangent commun aux deux surfaces, et passe par la droite AB; le second passe par le point A, mais il ne contient jamais la

droite AB; car, s'il passait par cette droite, on pourrait supposer $A_{22} = 0$, et l'équation en λ aura quatre racines égales.

Le second des plans (8) est visiblement le plan polaire du point B, nous le prendrons pour la face CAD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que nous supposerons

$$A_{23} = 0, \quad A_{24} = 0.$$

Les équations des deux surfaces sont alors

$$(9)\left\{\begin{array}{l} A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{34}zt = 0, \\ A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2B_{34}zt = 0; \end{array}\right.$$

et l'équation en λ se réduit à

$$(10) \qquad (\lambda + 1)^3 \begin{vmatrix} 0 & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33}(\lambda + 1) & B_{34} + \lambda A_{34} \\ A_{41} & B_{43} + \lambda A_{43} & A_{44}(\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0;$$

on ne pourra supposer nuls ni A_{13}, ni A_{14}, car autrement l'équation en λ admettrait quatre racines égales.

La droite AC ($y = 0$, $t = 0$) rencontre les deux surfaces (9) en deux points déterminés par l'équation

$$A_{33}z^2 + 2A_{13}xz = 0;$$

ces deux points, dont l'un est le point A, sont nécessairement distincts; nous prendrons le second comme sommet C, c'est-à-dire que nous supposerons

$$A_{33} = 0.$$

La droite AD ($y = 0$, $z = 0$) rencontre les deux surfaces aux deux points définis par l'équation

$$A_{44}t^2 + 2A_{14}xt = 0;$$

nous prendrons le point distinct de A pour sommet D.

c'est-à-dire que nous ferons

$$A_{44} = 0.$$

Les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(11) \quad \begin{cases} A_{22}y^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{34}zt = 0, \\ A_{22}y^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2B_{34}zt = 0; \end{cases}$$

l'équation en λ est

$$(12) \qquad (\lambda + 1)^3(B_{34} + \lambda A_{34}) = 0,$$

et l'équation du cône correspondant à la racine simple est

$$(13) \qquad A_{22}y^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt = 0.$$

Remarquons que les courbes communes aux deux surfaces (11) sont

$$A_{22}y^2 + 2A_{13}xz = 0,$$
$$A_{22}y^2 + 2A_{14}xt = 0;$$

les deux arêtes BC et BD sont tangentes à ces courbes aux points C et D respectivement.

Le point B n'a pas été choisi d'une manière explicite : si nous prenions, comme sommet B, un autre point sur AB, la face CAD, plan polaire de ce nouveau point, aurait une position différente ; il en serait de même des sommets C et D situés sur les coniques communes aux deux surfaces : les nouvelles arêtes BC et BD seraient encore tangentes à ces coniques.

26. De ce qui précède, il résulte que :

« Lorsque l'équation en λ a trois racines égales, et que
» le cône correspondant à la racine triple se réduit à
» deux plans distincts, les deux surfaces sont tangentes
» en un point unique, et se coupent suivant deux courbes
» planes qui se touchent au point de contact commun. La
» réciproque est vraie, et se démontre sans difficulté. »

Prenant pour faces ABC et ABD du tétraèdre de référence les plans des deux courbes communes; pour sommet A, le point où ces deux courbes se touchent; pour sommet B, un point arbitraire sur l'intersection AB des deux plans ABC et ABD; pour face CAD, le plan polaire de B; pour sommet C et D, les points où ce dernier plan vient rencontrer respectivement les coniques communes : *les équations des deux surfaces se ramèneront à la forme définitive :*

$$(14)\quad \begin{cases} (S) & y^2 + 2a\,xz + 2b\,xt + 2c\,zt = 0, \\ (T) & y^2 + 2a\,xz + 2b\,xt + 2c_1\,zt = 0; \end{cases}$$

l'équation du cône, correspondant à la racine simple, est

$$(15)\quad y^2 + 2a\,xz + 2b\,xt = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 + 2x(az + bt) = 0;$$

les coordonnées de son sommet sont définies par les équations

$$(16)\qquad x = 0, \quad y = 0, \quad az + bt = 0.$$

Ces équations mettent immédiatement en évidence les propositions qui suivent :

« Tous les points de l'intersection AB des deux plans » ABC et ABD ont même plan polaire par rapport aux » deux surfaces; tous ces plans polaires tournent autour » d'une droite fixe AS, située dans le plan tangent com» mun aux deux surfaces. Le sommet S du cône, corres» pondant à la racine simple, se trouve sur cette droite » AS.

« La droite CD, intersection du plan polaire d'un » point B (choisi arbitrairement sur AB) avec le plan » mené par le point B tangentiellement aux deux cour» bes planes, passe constamment par le sommet S. »

Le plan polaire du point S, défini par les équations (16), est

$$(17)\qquad az - bt = 0.$$

Donc :

« Le sommet du cône correspondant à la racine simple, » a même plan polaire par rapport aux deux surfaces : ce » plan passe par l'intersection des plans des deux coni- » ques communes, et forme, avec le plan tangent com- » mun, un système harmonique par rapport aux plans » des deux coniques. »

On constate aussi que :

« Les pôles d'un plan passant par AB, distincts par » rapport à chacune des surfaces, se meuvent sur la » droite AS qui joint le point de contact des deux sur- » faces au sommet du cône correspondant à la racine » simple ; et inversement.

27. Nous démontrerons enfin cette proposition :

« Un plan quelconque, passant par la droite AB, in- » tersection des plans des deux coniques communes, » coupe les deux surfaces suivant des coniques oscula- » trices ; ces coniques ont un contact du troisième ordre. »

En effet, l'équation d'un plan quelconque passant par AB étant

$$t = \alpha z,$$

les intersections des surfaces (14) par ce plan seront sur les cônes

$$(18)\qquad \begin{cases} y^2 + 2axz + 2\alpha b\,xz + 2\alpha c\,z^2 = 0, \\ y^2 + 2axz + 2\alpha b\,xz + 2\alpha c_1 z^2 = 0; \end{cases}$$

les équations de ces deux cônes, qui ont le point D pour sommet commun, peuvent être assimilées à celles de deux coniques ; l'équation en μ, correspondant aux systèmes de sécantes communes, est ici

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (a+\alpha b)(\mu+1) \\ 0 & \mu+1 & 0 \\ (a+\alpha b)(\mu+1) & 0 & 2\alpha(c+c_1\mu) \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\mu + 1)^3 = 0;$$

les trois racines sont donc égales; d'ailleurs le système de sécantes communes, correspondant à cette racine triple, se compose de deux droites coïncidentes; par conséquent les deux cônes sont osculateurs, et le contact est du troisième ordre; d'où la proposition énoncée.

« Un plan quelconque, passant par le point A, et ne » contenant pas la droite AB, coupe les surfaces suivant » des coniques simplement tangentes. »

Le fait est facile à constater.

III. *Le cône correspondant à la racine triple se compose de deux plans coïncidents.*

28. Prenons ce plan pour face ABC du tétraèdre de référence; en exprimant que l'équation du cône, correspondant à la racine triple, ne renferme que le terme en t^2, nous trouvons que les équations des deux surfaces sont de la forme

$$(1)\left\{\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0; \end{aligned}\right.$$

l'équation en λ est

$$(2)\qquad (\lambda + 1)^3 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41}(\lambda + 1) \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42}(\lambda + 1) \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43}(\lambda + 1) \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & B_{44} + \lambda A_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

celle du cône correspondant à la racine simple est

$$(3)\left\{\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + \frac{B_{44} + \lambda_1 A_{44}}{\lambda_1 + 1}t^2 + 2A_{12}xy \\ &\qquad + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, le sommet de ce cône n'est pas dans le plan ABC, car, s'il y était, l'intersection de la surface (3) par le plan ABC ou $t = 0$, savoir :

$$A_{11} x^2 + A_{22} y^2 + A_{33} z^2 + 2 A_{12} xy + 2 A_{13} xz + 2 A_{23} yz = 0,$$

devrait se réduire à deux droites ; on aurait donc

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

l'équation (2) aurait alors quatre racines égales ; on le voit immédiatement, en développant le déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, et en tenant compte de la relation (4).

Nous pouvons donc prendre le sommet du cône (3) pour sommet D du tétraèdre de référence, c'est-à-dire exprimer que l'équation (3) ne renferme pas de termes en t, on a ainsi

$$B_{44} + \lambda_1 A_{44} = 0, \quad A_{14} = 0, \quad A_{24} = 0, \quad A_{34} = 0.$$

Les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_{11} x^2 + A_{22} y^2 + A_{33} z^2 + A_{44} t^2 \\ & \qquad + 2 A_{12} xy + 2 A_{13} xz + 2 A_{23} yz = 0, \\ & A_{11} x^2 + A_{22} y^2 + A_{33} z^2 + B_{44} t^2 \\ & \qquad + 2 A_{12} xy + 2 A_{13} xz + 2 A_{23} yz = 0. \end{aligned} \right.$$

Les intersections des deux surfaces par le plan ABC ou $t = 0$ sont

$$(6) \quad A_{11} x^2 + A_{22} y^2 + A_{33} z^2 + 2 A_{12} xy + 2 A_{13} xz + 2 A_{23} yz = 0;$$

on peut prendre pour sommets A, B, C, ceux d'un triangle conjugué par rapport à la conique (6), c'est-à-dire supposer

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0.$$

En définitive, *les équations des deux surfaces se ramèneront à la forme*

$$(6)\qquad \begin{cases} ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0, \\ ax^2 + by^2 + cz^2 + d_1 t^2 = 0; \end{cases}$$

l'équation du cône correspondant à la racine simple sera

$$(7)\qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

« Les deux surfaces ont donc en commun la courbe

$$(8)\qquad t = 0, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0;$$

» et, en chacun des points de cette courbe, les deux sur-
» faces ont même plan tangent, on dit alors que les
» surfaces sont *circonscrites* l'une à l'autre suivant cette
» courbe. »

En effet, les équations des plans tangents à chacune des surfaces en un point (x_0, y_0, z_0, t_0) sont

$$(9)\qquad \begin{cases} ax_0 x + by_0 y + cz_0 z + dt_0 t = 0, \\ ax_0 x + by_0 y + cz_0 z + d_1 t_0 t = 0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + dt_0^2 = 0, \\ ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + d_1 t_0^2 = 0; \end{cases}$$

or, ces deux plans coïncideront évidemment si le point choisi appartient à la courbe (8), et ne coïncideront que dans ce cas.

« Le cône correspondant à la racine simple est circon-
» scrit à chacune des surfaces suivant leur courbe de
» contact. »

Car lorsqu'on suppose t_0 nul, le plan (9) devient un plan tangent au cône (7).

On démontrera facilement que :

« Réciproquement : si deux surfaces du second ordre
» sont circonscrites l'une à l'autre suivant une conique

» proprement dite, l'équation en λ admet une racine tri-
» ple, et le cône correspondant à la racine triple se ré-
» duit à deux plans coïncidents. »

29. Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0), par rapport à chacune des surfaces (6), ont pour équations

$$(10) \qquad \begin{cases} ax_0 x + by_0 y + cz_0 z + dt_0 t = 0, \\ ax_0 x + by_0 y + cz_0 z + d_1 t_0 t = 0. \end{cases}$$

D'après cela, il est visible que :

« Les points qui ont même plan polaire par rapport
» aux deux surfaces sont : d'une part, tous les points du
» plan de la courbe de contact, et les plans polaires de
» ces points passent par le sommet du cône correspon-
» dant à la racine simple ; d'autre part, le sommet du cône
« correspondant à la racine simple, le plan polaire de ce
» dernier point est le plan de la courbe de contact.

» Lorsqu'un plan tourne autour du sommet du cône
» correspondant à la racine simple, son pôle est le même
» par rapport aux deux surfaces, et se trouve évidem-
» ment dans le plan de la courbe de contact. »

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR UNE FORMULE DE LEIBNITZ;

Par M. Placide TARDY,
Recteur de l'Université de Gênes.

(Extrait du *Bulletin de Bibliographie et d'Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, publié par le prince B. Boncompagni, t. I, juin 1868.)

L'analogie qui existe entre les différentielles du produit de deux ou de plusieurs fonctions, et les puissances de

leur somme a été signalée pour la première fois au public par Leibnitz, dans un Mémoire intitulé : *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de Lege Homogeneorum transcendentali*, et inséré dans le tome I des *Miscellanea Berolinensia*. Ce Mémoire ne porte aucune date ; mais le volume qui le contient porte le millésime de 1710. Il a été reproduit depuis dans le tome III des *OEuvres* de Leibnitz, publiées par Louis Dutens, à Genève, en 1768. Dans ce Mémoire, l'illustre Auteur fait d'abord remarquer la correspondance entre les divers termes de la série qui représente la puissance d'un binôme $(x+y)^e$, qu'il écrit, pour rendre l'analogie sensible, sous la forme

$$\begin{aligned} p^e(x+y) = 1\, p^e x\, p^0 y + \frac{e}{1} p^{e-1} x\, p^1 y \\ + \frac{e(e-1)}{1.2} p^{e-2} x\, p^2 y + \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3} p^{e-3} x\, p^3 y \\ + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{1.2.3.4} p^{e-4} x\, p^4 y + \ldots, \end{aligned}$$

et entre les termes de la différentielle

$$\begin{aligned} d^e(xy) = 1\, d^e x\, d^0 y + \frac{e}{1} d^{e-1} x\, d^1 y \\ + \frac{e(e-1)}{1.2} d^{e-2} x\, d^2 y + \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3} d^{e-3} x\, d^3 y \\ + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{1.2.3.4} d^{e-4} x\, d^4 y + \ldots, \end{aligned}$$

laquelle s'obtient en substituant au symbole p de la puissance le symbole d de la différentiation. Il annonce ensuite que la même analogie a lieu entre la puissance d'un polynôme, par exemple, d'un trinôme $p^e(x+y+z)$, et la différentielle du produit $d^e(xyz)$.

Toutefois, plusieurs années avant la publication des

Miscellanea Berolinensia, Leibnitz était déjà en possession du théorème en question, et l'on trouve des traces de cette découverte dans la correspondance entre lui et Jean Bernoulli, imprimée en 1745. Dans une lettre de Leibnitz à Bernoulli du 6—16 mai 1695, on trouve la première indication de l'analogie entre les différentielles d'un produit et les puissances d'une somme, et Bernoulli, dans sa réponse (8—18 juin 1695), en louant l'élégance de ce résultat, semble presque soupçonner que l'on en peut encore tirer quelque conséquence pour les intégrales, bien qu'il déclare n'avoir pas pu examiner suffisamment la question : *Nondum satis vacavit examinare an quid inde pro summationibus elici possit.* Il indique d'ailleurs un procédé pour obtenir l'intégrale, lequel consiste à chercher une troisième proportionnelle à la différentielle de l'expression à intégrer et à l'expression elle-même, et dans lequel se trouve posé pour la première fois le principe de considérer le symbole d'opération d comme un symbole de quantité : *Consideratis interim d, d^2, d^3, d^4,..., tanquam quantitatibus algebraicis, et non ut litteris tantummodo caracteristicis.* Et dans une lettre du 7—17 juillet 1695, il retrouve, comme application, sa célèbre série

$$\int n\,dz = nz - dn\frac{z^2}{1.2\,dz} + d^2n\frac{z^3}{1.2.3\,dz^2} - d^3n\frac{z^4}{1.2.3.4\,dz^3} + \ldots$$

qu'il avait déjà donnée dans les *Actes de Leipzig* de novembre 1694 ; et il se réjouit de cet accord inespéré, qui vient confirmer la justesse de sa dernière méthode, *ubi tam mirabiliter et contra omnem consuetudinem cum litteris d proceditur.* Or le procédé de Bernoulli revient au fond à dire qu'il faut prendre pour $\int n\,dz$ la série

analogue à celle que donne le développement de $\frac{1}{dz + n}$ ou de $(dz + n)^{-1}$. Mais l'analogie entre les intégrales et les puissances négatives n'avait pas encore été aperçu. Leibnitz lui-même, quoique ayant déjà établi la signification du symbole d avec un indice négatif, en comparant les sommes aux racines, ne paraît pas s'en être encore fait une idée nette; et la première fois qu'il énonce clairement et complétement le théorème, c'est dans un *Post-scriptum*, à une lettre adressée par lui au célébre géomètre Guillaume-François de l'Hospital, Marquis de Saint-Mesme, et datée de Hanovre, le 30 septembre (N. St.) 1695. Dans ce *Post-scriptum*, auquel il est fait allusion dans deux passages de la correspondance précitée, Leibnitz commence par donner la série de Bernoulli à la suite du développement de $p^{-1}(x + y)$; puis il fait observer que, plus généralement, de $p^e(x + y)$ on déduit $d^e(xy)$, et il ajoute que, si e était négatif et $= -n$, d^e se changerait en $\int^n$. Il indique encore, dans le même endroit, comment l'analogie peut s'étendre au cas des indices fractionnaires, et exprimer, par exemple, $d^{\frac{1}{2}}(xy)$ au moyen d'une série infinie « quoyque cela paroisse éloigné de la Géometrie, qui ne connoist ordinairement que les differences à exposants entiers affirmatifs, ou les negatifs à l'egard des sommes, et pas encore celles, dont les exposans sont rompus ». Plus tard, Leibnitz, dans sa lettre du 20—30 octobre 1695, communiquait à Bernoulli l'application de l'analogie observée aux intégrales, et celui-ci lui demandait, dans sa réponse, ce que serait $d^m(xy)$ pour m fractionnaire ou irrationnel; à quoi Leibnitz répliquait en reproduisant ce qu'il avait écrit au Marquis de l'Hospital. D'après cela, n'est-il pas singulier que cette extension si remarquable et si bien appréciée n'avait été nullement mentionnée dans son Mémoire intitulé : *Symbolismus memorabilis*,

publié tant d'années après? Bernoulli lui-même, en recevant le volume des *Miscellanea Berolinensia*, reste frappé d'un tel silence, et le 10 décembre 1710, il lui écrit : *Quæ de symbolismo calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum habes, nondum exhauriunt omnia quæ ante has quindecim annos inter nos fuerunt agitata*, et il lui rappelle en particulier l'application qui en avait été faite aux intégrales. A quoi Leibnitz, tout en déclarant se souvenir des communications échangées entre eux, répond pour unique raison : *Symbolismus calculi algebraici et infinitesimalis dare volui simpliciter.*

Quoi qu'il en soit, en 1754, Lagrange, à peine âgé de dix-huit ans, ignorant complétement les recherches de Leibnitz sur ce sujet, adressait au Comte de Fagnano une lettre (sa première production, et la seule qu'il ait écrite en langue italienne), dans laquelle il mettait en évidence cette analogie, comme l'avait fait précisément le grand géomètre allemand.

Arago rapporte, dans son *Éloge de Fresnel*, que Lagrange racontait qu'ayant trouvé par hasard, dans les OEuvres de Leibnitz, la formule qu'il avait regardée jusque-là comme sa découverte, il en éprouva un si profond chagrin, qu'il s'évanouit complétement, et qu'il s'en fallut même peu que dès ce jour il ne renonçât tout à fait aux études mathématiques.

Il semblerait que de nos jours bien des gens ont la fibre moins sensible.

Les premiers théorèmes de Leibnitz restèrent cependant inféconds jusqu'au jour où le même Lagrange publia, dans le volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1772, son beau Mémoire intitulé : « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables ». Là, sans faire aucune mention de

sa lettre au Comte de Fagnano, il commence par reconnaître les droits de Leibnitz, et généralisant les idées, il fait voir l'analogie qui existe entre les différences finies et les puissances positives, entre les sommations et les puissances négatives. De cette manière il parvient à quelques formules symboliques très-importantes, qui, trouvées par induction, furent démontrées plus tard par Laplace, Lorgna et d'autres, et que l'on peut regarder comme le point de départ des travaux de Lorgna, d'Arbogast, de Français, de Lobatto, etc., lesquels, fécondant en quelque sorte l'idée émise par Bernoulli, ont proposé de séparer les caractéristiques des fonctions qui leur sont soumises, et de les traiter comme des symboles de quantités; et ont ainsi donné naissance au calcul moderne des opérations, cultivé spécialement par les géomètres anglais, et dont les vrais fondements furent établis par Servois.

Deux des formules particulières données par Lagrange, savoir :

$$\Delta^n y = \left[e^{\omega\left(\frac{dy}{dx}\right)} - 1\right]^n,$$

$$\omega^n \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = [\log(1 + \Delta y)]^n,$$

dans lesquelles ω est la différence constante de x et qui sont vraies pour x positif ou négatif, furent étendues au cas de n fractionnaire dans un ouvrage intitulé : *Nuove ricerche analitiche, geometriche et meccaniche, contenenti i metodi generali della divisione, iscrizione, e circoscrizione delle figure, dedotte dalla comparazione delle serie; di* LUIGI FORNI, Professor di Matematiche della R. Scuola T. P. d'Artigleria in Pavia; Pavia, nella Tipografia Bolzani: 1811 (p. 34 et suiv.).

Le théorème de Leibnitz, qui, en désignant par D la

dérivée et par $(\mu)_r$ le coefficient binomial

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-r+1)}{1.2.3\ldots r},$$

est exprimée par l'équation

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}^\mu uv = u\,\mathrm{D}^\mu v + (\mu)_1\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}^{\mu-1}v \\ \qquad + (\mu)_2\,\mathrm{D}^2 u\,\mathrm{D}^{\mu-2}v + (\mu)_3\,\mathrm{D}^3 u\,\mathrm{D}^{\mu-3}v + \ldots, \end{array} \right.$$

dans laquelle son auteur avait déjà prouvé que l'on pouvait faire μ fractionnaire, a été démontré vrai pour μ quelconque par M. Liouville (*Journal de l'École Polytechnique,* 21[e] cahier, t. XIII, 1832, p. 117 et suiv.), en partant de sa définition générale des dérivées à indices quelconques, d'après laquelle, en supposant

$$y = e^{mx},$$

on a

$$\mathrm{D}^\mu y = m^\mu e^{mx}.$$

Dans un Mémoire présenté en 1844 au Congrès scientifique de Milan, et reproduit avec de légers changements et suppressions en 1858, dans le tome I des *Annali di Matematica pura ed applicata* du Professeur Tortolini, nous avions aussi, suivant notre point de vue, démontré que la formule (A) avait lieu pour μ quelconque.

Cette démonstration ne fut pas insérée dans les *Annali*, et aujourd'hui je vais la reproduire ici, pour répondre à la bienveillante invitation de M. le Prince Boncompagni.

La formule fondamentale que l'on obtient au moyen d'intégrations par parties successives, et que nous avions prise pour exprimer l'intégration à indice quelconque d'une fonction, peut s'écrire, d'une manière abrégée,

$$(1) \qquad \int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu = \frac{x^\mu}{\Gamma(\mu)} \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(-1)^h}{1.2.3\ldots h}\cdot\frac{x^h}{\mu+h}\,\mathrm{D}^h\varphi.$$

Faisons $\varphi(x) = uv$, u et v étant des fonctions de x : nous aurons

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \int^{\mu} uv\, dx^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots k} \cdot \frac{x^k}{\mu+k} [u\,\mathrm{D}^k v + (k)_1\, \mathrm{D}u\, \mathrm{D}^{k-1} v + \ldots \\ + (k)_r\, \mathrm{D}^r u\, \mathrm{D}^{k-r} v + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

Or, comme le coefficient $(k)_r$ s'annule pour

$$k = 0,\quad 1,\quad 2, \ldots,\quad r-1,$$

il est clair que nous pourrons mettre, dans le terme général, $k+r$ au lieu de k, ce qui lui donnera la forme

$$\frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k+r}}{1.2.3\ldots(k+r)} \cdot \frac{x^{k+r}}{\mu+k+r} (k+r)_r\, \mathrm{D}^r u\, \mathrm{D}^k v;$$

multiplions et divisons par

$$\mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1),$$

et observons que

$$\mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1)\Gamma(\mu) = \Gamma(\mu+r),$$

$$\frac{(k+r)_r}{1.2.3\ldots(k+r)} = \frac{1}{1.2.3\ldots k} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots r},$$

$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1)}{1.2.3\ldots r} = (-1)^r (-\mu)_r.$$

Le terme se réduira par là à

$$(-\mu)_r\, \mathrm{D}^r u \frac{x^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots k} \cdot \frac{x^k}{\mu+r+k} . \mathrm{D}^k v,$$

et par l'équation (1) elle-même, il est égal à

$$(-\mu)_r\, \mathrm{D}^r u \int^{\mu+r} v\, dx^{\mu+r}.$$

En substituant donc dans (2), il viendra

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \int^{\mu} uv\,dx^{\mu} = u\int^{\mu} v\,dx^{\mu} + (-\mu)_1 \mathrm{D}u \int^{\mu+1} v\,dx^{\mu+1} + \ldots \\ + (-\mu)_r \mathrm{D}^r u \int^{\mu+r} v\,dx^{\mu+r} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir que cette formule est encore vraie pour μ négatif, en substituant le symbole d au symbole $\int$ affecté d'un indice négatif. Soit, en effet, τ un nombre positif quelconque, mais tel que l'on ait

$$\mu + \tau = p,$$

p étant entier, et soit r le plus grand entier contenu dans τ; en prenant la dérivée d'ordre p de la formule (3), il viendra

$$\begin{aligned}
&= u\mathrm{D}^{\tau} v + (p)_1 \mathrm{D}u\,\mathrm{D}^{\tau-1} v + \ldots \\
&+ (p)_r \mathrm{D}^r u\,\mathrm{D}^{\tau-r} v + (p)_{r-1} \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\,dx^{r+1-\tau} + \ldots \\
&+ (-\mu)_1 \mathrm{D}u\,\mathrm{D}^{\tau-1} v + \ldots + (-\mu)_1 (p)_{r-1} \mathrm{D}^r u\,\mathrm{D}^{\tau-r} v + (-\mu)_1 (p)_r \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\,dx^{r+1-\tau} + \ldots \\
&+ (-\mu)_2 (p)_{r-2} \mathrm{D}^r u\,\mathrm{D}^{\tau-r} v + (-\mu)_2 (p)_{r-1} \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\,dx^{r+1-\tau} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (-\mu)_r \mathrm{D}^r u\,\mathrm{D}^{\tau-r} v + (-\mu)_r (p)_1 \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\,dx^{r+1-\tau} + \ldots \\
&+ (-\mu)_{r+1} \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\,dx^{r+1-\tau} + \ldots
\end{aligned}$$

Mais, par une propriété connue des coefficients binomiaux, on a

$$\begin{aligned} &(p)_1 + (-\mu)_1 (p)_{r-1} + (-\mu)_2 (p)_{r-2} + \ldots + (-\mu)_r \\ &\quad = (p-\mu)_r = (\tau)_r, \end{aligned}$$

donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}^{\tau} uv = u\mathrm{D}^{\tau} v + (\tau)_1 \mathrm{D}u\,\mathrm{D}^{\tau-1} v \\ + (\tau)_2 \mathrm{D}^2 u\,\mathrm{D}^{\tau-2} v + \ldots + (\tau)_r \mathrm{D}^r u\,\mathrm{D}^{\tau-r} v \\ + (\tau)_{r+1} \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\,dx^{r+1-\tau} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons conclure de là que la forme de Leibnitz pour la dérivée d'un produit subsiste pour un indice quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

Questions 912 *et* 913

(voir 2e série, t. VIII, p. 48);

PAR M. ANDRÉ,

Ancien élève de l'École Normale, Professeur à Sainte-Barbe.

I.

THÉORÈME. — *Étant données deux suites de n nombres entiers* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, *dont les termes se correspondent de telle sorte qu'on ait*

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \ldots = a_n b_n = P,$$

si l'on désigne par D_a *le plus grand commun diviseur, et par* M_a *le plus petit commun multiple des nombres de la première suite, par* D_b *le plus grand commun diviseur, et par* M_b *le plus grand commun multiple des nombres de la seconde, on a*

$$M_a D_b = M_b D_a = P.$$

Première démonstration. — Soit p un facteur premier qui a α pour plus fort exposant dans la première suite, β pour plus faible exposant dans la seconde : il y aura évidemment dans P un exposant égal à $\alpha + \beta$. Or, ce même facteur premier entrera dans M_a avec l'exposant α, dans D_b avec l'exposant β, et, par suite, dans $M_a D_b$ avec l'exposant $\alpha + \beta$. Donc

$$M_a D_b = P.$$

De même

$$M_b D_a = P.$$

Deuxième démonstration. — Nous nous appuierons sur ce lemme connu : « Pour qu'un multiple de plusieurs

nombres soit le plus petit commun diviseur de ces nombres, il faut et il suffit qu'en le divisant séparément par chacun d'eux, on obtienne des quotients premiers entre eux. »

Cela posé, si l'on a $x = \frac{P}{D_b}$, x est le plus petit commun multiple des nombres de la première suite. En effet, x est un multiple commun de ces nombres, car il est égal à l'un quelconque d'entre eux, multiplié par le quotient qu'on obtient en divisant par D_b le nombre correspondant de la seconde suite; de plus, x est le plus petit commun multiple de ces nombres, car en le divisant séparément par chacun d'eux, on obtient les mêmes quotients qu'en divisant par D_b les nombres de la seconde suite, c'est-à-dire des nombres premiers entre eux. Donc $x = M_a$. Donc

$$M_a D_b = P.$$

De même

$$M_b D_a = P.$$

II.

De ce théorème résultent immédiatement les corollaires suivants :

Corollaire I. — Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres est égal à un multiple commun quelconque de tous ces nombres divisé par le plus grand commun diviseur des quotients qu'on obtient en divisant ce multiple séparément par chacun des nombres donnés.

Corollaire II. — Le plus grand commun multiple de plusieurs nombres est égal à un multiple commun quelconque de tous ces nombres divisé par le plus petit commun multiple des quotients qu'on obtient en divisant ce multiple séparément par chacun des nombres donnés.

Corollaire III. — En multipliant le plus petit commun multiple des produits K à K de n nombres par le plus grand commun diviseur des produits $n-K$ à $n-K$, on obtient le produit des n nombres donnés.

Corollaire IV. — Le plus petit commun multiple de n nombres est égal au produit de tous ces nombres divisé par le plus grand commun diviseur de leurs produits $n-1$ à $n-1$. (Question 912.)

Corollaire V. — Le plus grand commun diviseur de n nombres est égal au produit de tous ces nombres divisé par le plus petit commun multiple de leurs produits $n-1$ à $n-1$. (Question 913.)

Note du Rédacteur.—La question 913 est intéressante parce qu'elle est la généralisation d'un théorème bien connu relatif au plus grand commun diviseur de deux nombres.

Le théorème que démontre M. André, et dont il déduit les solutions des questions 912 et 913, est de M. Le Besgue; on le trouve énoncé dans ses *Exercices d'Analyse numérique* (Paris, 1819), p. 32, sous la forme suivante : *En nommant* D *le plus grand commun diviseur, m le plus petit multiple de plusieurs nombres a, b, c, . . ., on a toujours*

$$abc\ldots = \mathrm{P} = \mathrm{D}(a, b, c, \ldots) \times m\left(\frac{\mathrm{P}}{a}, \frac{\mathrm{P}}{b}, \frac{\mathrm{P}}{c}, \ldots\right).$$

M. Le Besgue fait remarquer que si les deux suites

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3\ldots, \\ b_1 & b_2 & b_3\ldots, \end{matrix}$$

sont telles que

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \ldots = \mathrm{P},$$

comme P est multiple de tous les nombres a et aussi de tous les nombres b, et que le plus petit multiple commun

divise un multiple commun quelconque, on a

$$P = D(a_1, a_2, a_3, \ldots)\, m(b_1, b_2, b_3, \ldots).$$

C'est le théorème démontré par M. André.

M. Demartres, de Mezin (Lot-et-Garonne), nous a adressé une solution des questions 912 et 913 qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. André.

DISCUSSION DE LA FRACTION

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'};$$

PAR M. DARBOUX.

Nous nous appuierons sur les lemmes suivants :

LEMME I. — *Considérons les deux équations du second degré*

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

$$(2) \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Soient α, β *les racines de la première équation,* α', β' *les racines de la seconde. On a l'identité*

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &(-bb' + 2ac' - 2ca')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') \\ &\quad = 4a^2a'^2(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta'). \end{aligned} \right.$$

Cette identité se démontre très-facilement, il suffit, par exemple, de remplacer b, c, b', c' par leurs expressions en fonction de a, a' et des sommes et produits des racines.

Comme on a d'ailleurs, en vertu de la décomposition du trinôme

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha')(x - \beta'),$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

Nous voyons que le premier membre de l'identité (3), premier membre que nous désignerons par Δ, peut s'écrire des deux manières suivantes :

$$(4) \qquad \Delta = 4a^2(a'\alpha^2 + b'\alpha + c')(a'\beta^2 + b'\beta + c'),$$

$$(5) \qquad \Delta = 4a'^2(a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c).$$

Lemme II. — *L'équation $\Delta = 0$ donne la condition nécessaire et suffisante pour que les équations du second degré* (1) *et* (2) *aient une racine commune.*

En effet, si nous nous reportons à l'identité (3), nous reconnaissons que la condition nécessaire et suffisante pour que Δ soit nul, c'est que l'un des quatre facteurs

$$\alpha - \alpha', \quad \alpha - \beta', \quad \beta - \alpha', \quad \beta - \beta'$$

soit nul, c'est-à-dire qu'une des racines α, β soit égale à une des racines α', β'.

Lemme III. — *La quantité Δ ne peut être négative que si les quatre racines α, β, α', β' sont réelles, et il faut en outre que l'une des racines du numérateur, et une seule, soit comprise entre les deux racines du dénominateur.*

En d'autres termes, supposons qu'on porte sur une droite des longueurs

$$\text{OA} = \alpha, \quad \text{OB} = \beta,$$
$$\text{OA}' = \alpha', \quad \text{OB}' = \beta',$$

il faut, suivant l'expression de M. Chasles, que les segments AB, A'B' empiètent l'un sur l'autre.

Démonstration. — Supposons en effet que les racines d'une des équations de la première, par exemple, soient imaginaires. Alors, d'après l'identité (4), Δ devra être considéré comme un produit de deux facteurs imaginaires

$$(6) \qquad 2a(a'\alpha^2 + b'\alpha + c') \quad \text{et} \quad 2a(a'\beta^2 + b'\beta + c').$$

Ces facteurs sont conjugués puisque α et β sont conjugués. Donc Δ est positif.

Considérons maintenant le cas où les quatre racines α, β, α', β' sont réelles. Si Δ est négatif, les deux facteurs de Δ (6) seront de signes contraires. Le trinôme

$$a'x^2 + b'x + c'$$

aura donc pour α et β des valeurs de signes contraires; il y aura donc une des racines de ce trinôme, et une seule, dans l'intervalle de α à β.

Si l'un des segments, AB par exemple, comprend l'autre, ou, s'ils n'ont aucune partie commune, dans ce cas Δ sera positif.

Discussion de l'expression $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. — Soit y une des valeurs de cette expression. Si l'on se propose de déterminer x connaissant y, il faudra que les valeurs de x soient réelles. Les valeurs de x sont données par l'équation

$$(7) \qquad (a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c'y = 0.$$

La condition de réalité est

$$(b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y) > 0,$$
$$(b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(-bb' + 2ac' + 2ca')y + b^2 - 4ac > 0.$$

Ce trinôme ne pourra pas se décomposer en facteurs réels du second degré dans le cas où l'expression

$$(2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') = \Delta$$

sera négative; mais, dans ce cas, les équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

auront leurs racines réelles, on aura

$$b'^2 - 4a'c' > 0,$$

et l'inégalité sera toujours satisfaite

Donc y pourra prendre toutes les valeurs possibles.

Si $\Delta > 0$, y aura toujours un maximum et un minimum, et dans ce cas la discussion ne présente aucune difficulté.

Enfin quand $\Delta = 0$, une des racines α, β est égale à une des racines α', β' : le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun qu'on pourra faire disparaître, et y prendra alors toutes les valeurs.

Nous insisterons en terminant sur la propriété suivante :

Théorème. — *Si l'on porte sur une droite à partir d'une origine fixe des longueurs* OM, OM′ *égales aux deux valeurs de x pour lesquelles y reçoit une même valeur, ces points* M, M′ *sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes : en d'autres termes, ils forment une involution.*

En effet, les deux nombres x', x'', pour lesquels y prend la même valeur, sont donnés par l'équation (7). On obtient donc les deux relations

$$x' + x'' = -\frac{b - b'y}{a - a'y}, \qquad x'x'' = \frac{c - c'y}{a - a'y}.$$

Éliminons y entre ces deux équations, nous trouvons la relation

$$(ca' - ac')(x' + x'') + (ba' - ab')x'x'' + cb' - bc' = 0,$$

équation de la forme

$$\mathrm{A}x'x'' + \mathrm{B}(x' + x'') + \mathrm{C} = 0,$$

ou

$$\mathrm{A}\left(x' + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)\left(x'' + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right) + \mathrm{C} - \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} = 0.$$

On voit bien que le produit des distances des points x',

x'' au point dont l'abscisse est $-\frac{B}{A}$ est constant, ce qui est le caractère même de l'involution.

Si les deux points x', x'' viennent se confondre, la fonction devient maxima ou minima, et l'on a les points doubles réels ou imaginaires de l'involution par la formule

$$(8) \qquad (ba' - ab')x^2 + 2(ca' - ac')x + cb' - bc' = 0.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'expression qui détermine la nature des racines de cette équation, que l'invariant

$$(ca' - ac')^2 - (ba' - ab')(cb' - bc')$$

est égal à $\frac{\Delta}{4}$.

Nous terminerons en faisant une application géométrique de ce qui précède.

Soient les deux courbes du second degré

$$S = 0, \quad S' = 0.$$

L'équation générale des courbes passant par leur intersection sera

$$S + \lambda S' = 0.$$

Coupons ces courbes par une droite quelconque, que nous aurons prise pour axe des x, il faudra faire $y = 0$ dans l'équation précédente, qui se réduira à une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0,$$

ou

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c} = -\lambda.$$

On voit donc que *si l'on considère les coniques passant par quatre points fixes, elles déterminent sur une droite*

quelconque des segments en involution. C'est le théorème de Desargues généralisé par Sturm.

Quoique les considérations précédentes ne présentent rien d'absolument nouveau, nous avons cru devoir les rédiger dans l'intérêt des élèves.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Généralisation de la Question 836 (*)

(voir 2e série, t. VI, p. 526);

Par M. FOURET,

Lieutenant du Génie.

Le théorème qui fait l'objet de la Question 836 n'est qu'un cas particulier du suivant.

Lorsque quatre surfaces du second ordre ont une intersection commune, les plans polaires d'un point quelconque par rapport à ces surfaces : 1° passent par un même point ; 2° ont un rapport anharmonique constant.

1. Pour démontrer ce théorème, imaginons quatre surfaces du deuxième ordre ayant pour intersection commune la courbe T, et coupons ces surfaces par un plan quelconque Q passant par le point P. Les quatre courbes obtenues ont quatre points communs situés à la rencontre du plan et de la courbe T. Les polaires du point P par rapport à ces courbes passent donc par un même point (Chasles, *Traité des Sections coniques*, p. 203). Or ces polaires étant les intersections des plans polaires par le

(*) Voir une solution analytique de cette question dans le numéro d'octobre 1868, t. VII, p. 4[illegible].

plan Q, et la direction de ce dernier plan étant arbitraire, on voit que les plans polaires ont une infinité de points communs, lesquels sont nécessairement sur une même ligne droite Δ.

2. Les plans polaires, puisqu'ils passent par une même droite, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre polaires (CHASLES, *Traité de Géométrie supérieure*, p. 14). Or lorsque le point I se déplace dans le plan Q, le rapport anharmonique de ses quatre polaires ne change pas (CHASLES, *Traité des Sections coniques*, p. 205); et comme le plan Q est arbitraire, il en est de même du rapport anharmonique des quatre plans polaires du point P, lorsque ce point se déplace d'une manière quelconque dans l'espace.

Si, en particulier, on prend le point P sur la courbe T, les plans polaires deviennent les plans tangents en ce point; ils se coupent suivant la tangente à T, et le théorème leur est applicable.

Le théorème proposé résulte immédiatement de celui que nous venons de démontrer; il suffit de remarquer que les sommets du tétraèdre ABCD sont les sommets de quatre cônes du deuxième ordre (réels ou imaginaires) contenant la courbe T, et que les plans menés par la droite A et les sommets de ce tétraèdre sont les plans polaires du point P par rapport à ces quatre cônes.

Question 875

(voir 2e série, t. VII, p. 238).

PAR E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

ÉNONCÉ. — *Construisons deux ellipses* P *et* P' *telles que les demi-axes de la première coïncident en direction*

avec ceux de la seconde, mais soient respectivement proportionnels à leurs carrés :

1° *Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres quelconques* D_1 *et* D_2 *de l'ellipse* P, *vaut le parallélogramme construit sur les demi-axes de cette ellipse assemblés sous l'angle* ζ *que forment entre eux les conjugués respectifs de* D_1 *et* D_2 *dans l'ellipse* P′;

2° *Lorque les diamètres* D_1 *et* D_2 *sont conjugués dans l'ellipse* P, *leurs conjugués respectifs dans l'ellipse* P′ *se coupent à angle droit ;*

3° *Le secteur elliptique compris entre deux demi-diamètres* D_1 *et* D_2 *dans l'ellipse* P, *est proportionnel à l'angle* ζ *ou à la courbure de l'arc qu'ils interceptent sur l'ellipse* P′ :

4° *Lorsqu'un point décrit une ellipse* P *par l'action d'une force dirigée vers son centre, le rayon vecteur conjugué, par rapport à l'ellipse* P′, *de celui qui passe par le point mobile, tourne autour du centre d'un mouvement uniforme ;*

5° *Les perpendiculaires abaissées des extrémités de deux diamètres quelconques* D_1 *et* D_2 *de l'ellipse* P *sur les directions qui leur sont réciproquement conjuguées dans l'ellipse* P′, *sont égales entre elles ;*

6° *Comment ces énoncés se modifient-ils pour l'hyperbole ?*

(P. Gilbert, *Bulletin de la Société Philomathique*, 26 octobre 1867.)

I. Soient

$$(p) \qquad \frac{k^2x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{b^2} = 1,$$

$$(p') \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

les équations des ellipses P et P′

Le diamètre D_1 de P, $\left(\dfrac{x}{\dfrac{a^2\cos u}{k}} = \dfrac{y}{\dfrac{b^2\sin u}{k}}\right)$, a pour conjugué, dans l'ellipse P′,

$$\frac{a^2\cos u}{k}\,\frac{x}{a^2} + \frac{b^2\sin u}{k}\,\frac{y}{b^2} = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$(D'_1) \qquad x\cos u + y\sin u = 0.$$

L'équation de D_2 étant

$$\frac{x}{\dfrac{a^2\cos u'}{k}} = \frac{y}{\dfrac{b^2\sin u'}{k}},$$

le diamètre conjugué dans P′ aura pour équation

$$(D'_2) \qquad x\cos u' + y\sin u' = 0.$$

L'angle (ζ) des deux diamètres D'_1, D'_2 est

$$u' - u = \zeta.$$

D'autre part, le parallélogramme construit sur D_1 et D_2 a pour expression

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a^2\cos u}{k}, & \dfrac{b^2\sin u}{k} \\ \dfrac{a^2\cos u'}{k}, & \dfrac{b^2\sin u'}{k} \end{vmatrix} = \frac{a^2 b^2}{k^2}\sin(u' - u) = \frac{\alpha^2 b^2}{k^2}\sin\zeta;$$

donc : « Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres quelconques D_1 et D_2 de l'ellipse P vaut le parallélogramme construit sur les demi-axes de cette ellipse assemblés sous l'angle ζ que forment entre eux les conjugués respectifs de D_1 et D_2 dans l'ellipse P′. »

II. Si les deux diamètres D_1 et D_2 sont conjugués, on a

$$\cos u \cos u' + \sin u \sin u' = 0,$$

ou

$$u' - u = \zeta = 90^\circ;$$

donc : « Lorsque les diamètres D_1 et D_2 sont conjugués dans l'ellipse P, leurs conjugués respectifs dans l'ellipse P′ se coupent à angle droit. »

III. Le secteur elliptique entre les deux demi-diamètres D_1 et D_2 dans l'ellipse P est égal à

$$\frac{a^2 b^2}{k^2}(u' - u) = \frac{a^2 b^2}{k^2}\zeta,$$

et, par conséquent, proportionnel à ζ ou encore à la courbure de l'arc qu'ils interceptent sur l'ellipse P′, puisque les tangentes menées aux extrémités de cet arc sont respectivement parallèles aux diamètres D'_1 et D'_2, conjugués de D_1 et D_2 dans l'ellipse P′.

IV. Si un point décrit l'ellipse P par l'action d'une force dirigée vers son centre, les aires décrites par son rayon vecteur (D_1) seront proportionnelles au temps, et par suite, on aura $\zeta = kt$. Le rayon (D'_1) conjugué de D_1 dans l'ellipse P′ tournera donc autour du centre d'un mouvement uniforme.

V. « Les perpendiculaires abaissées des extrémités de deux diamètres quelconques D_1 et D_2 de l'ellipse P sur les directions qui leur sont réciproquement conjuguées dans l'ellipse P′, sont égales entre elles. » En effet, ces deux distances sont égales, d'après les formules (D'_1) et (D'_2), à

$$\frac{a^2}{k}\cos u \cos u' + \frac{b^2}{k}\sin u \sin u'.$$

VI. Si l'ellipse P′ est remplacée par une hyperbole, les théorèmes précédents subsistent sans modification, car ils sont indépendants du signe de a^2 et de b^2.

Note. — Nous avons reçu les solutions de MM. Jasseron, élève du lycée de Besançon; Paul Endrès, du lycée de Douai (classe de M. Painvin); Griolet (Henri), du lycée de Grenoble.

Toutes sont à peu près semblables; nous avons préféré celle de M. Pellet, parce que les calculs nous ont paru plus élégants et la rédaction plus concise. Nous profitons de cette occasion pour recommander à nos Correspondants d'apporter un soin tout particulier dans la rédaction des travaux qu'ils nous envoient pour les *Nouvelles Annales* et dans le tracé des figures qui parfois les accompagnent. J. B.

Question 889.

(voir 2e série, t. VII, p. 335);

PAR M. SCHLEGEL,

Étudiant de Mathématiques à Berlin, Membre de la Société d'étudiants de Mathématiques.

Démontrer que le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$\text{(I)} \qquad x + y + z = N$$

sous les conditions

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x \overline{\leqq} y + z; \\ y \overline{\leqq} z + x, \\ z \overline{\leqq} x + y, \end{cases}$$

est $\frac{N^2 - 1}{8}$ *ou* $\frac{(N + 2)(N + 4)}{8}$, *suivant que* N *est un nombre impair ou pair?* (CH. HERMITE.)

Soient $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = N - \alpha - \beta$ une des valeurs entières et positives qui satisfont à la question proposée.

Premier cas : N *impair* $= 2\lambda + 1$. — Il faut que x, y, z satisfassent aux inégalités

$$\alpha \leqq \beta + (N - \alpha - \beta) \quad \text{ou} \quad \alpha \leqq \frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha < \lambda + \frac{1}{2},$$

$$\alpha \leqq (N - \alpha - \beta) + \alpha \quad \text{ou} \quad \beta \leqq \frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \beta < \lambda + \frac{1}{2},$$

$$N - \alpha - \beta \leqq \alpha + \beta \quad \text{ou} \quad \beta \geqq \frac{N}{2} - \alpha \quad \text{ou} \quad \beta > \lambda - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Donc pour une valeur fixe de α entre les limites 1 et λ

la plus petite valeur de β sera...... $\lambda - (\alpha - 1)$,
la plus grande valeur............. $\beta = \lambda$.

Il suit de là que β accepte α valeurs pour la valeur α de x ; donc le nombre des solutions entières et positives de l'équation (I) sous les conditions (II) sera

$$L = 1 + 2 + \ldots + \lambda = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \alpha = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\alpha}$$

$$= \frac{(N - 1)(N - 1)}{8} = \frac{N^2 - 1}{8} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Deuxième cas : N *pair* $= 2\lambda$. — Il faut que x, y, z satisfassent aux inégalités

$$\alpha \leqq \beta + (N - \alpha - \beta) \quad \text{ou} \quad \alpha \leqq \frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha \leqq \lambda,$$

$$\beta \leqq (N - \alpha - \beta) + \alpha \quad \text{ou} \quad \beta \leqq \frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \beta \leqq \lambda,$$

$$N - \alpha - \beta \leqq \alpha + \beta \quad \text{ou} \quad \beta \geqq \frac{N}{2} - \alpha \quad \text{ou} \quad \beta \geqq \lambda - \alpha.$$

Donc, pour une valeur fixe de α entre les limites 0 et λ,

la plus petite valeur de β sera....... $\lambda - \alpha$,
la plus grande valeur.......... . $\beta = \lambda$.

β peut ainsi accepter $\alpha + 1$ valeurs pour $x = \alpha$; donc le nombre des solutions entières et positives de l'équation (I) sous les conditions (II) sera

$$S = 1 + 2 + \ldots + (\lambda + 1) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\lambda} (\alpha + 1)$$

$$= \frac{(\lambda + 2)(\lambda + 1)}{2} = \frac{(N + 2)(N + 4)}{8}.$$

C. Q. F. D.

Note. — **Nous avons reçu deux autres solutions analogues : l'une de M. Valher, du collége Rollin ; l'autre de M. Léon Geoffroy, élève de l'École Centrale.**

Note du Rédacteur. — Un Professeur, très-connu des lecteurs de nos *Annales*, nous a fait remarquer que l'énoncé de la question 889 devient plus clair si l'on y ajoute que les solutions de l'équation $x + y + z = N$ doivent être regardées comme différentes, lorsque le premier membre se compose des mêmes nombres rangés dans un ordre différent.

Il propose la question suivante plus générale :

Quel est le nombre des solutions positives et entières de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = N :$$

on regarde comme différentes les solutions qui ne diffèrent que par l'ordre des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

En supposant m inconnues positives non supérieures à $\frac{N}{2}$, et faisant

$$S_i = \frac{m(m+1)\ldots(m+i-1)}{1.2\ldots i} = \frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+m-1)}{1.2\ldots(m-1)},$$

il trouve pour le nombre des solutions :

1° Si N est pair,

$$S_N - mS_{\frac{N}{2}-1} ;$$

2° Si N est impair,

$$S_N - mS_{\frac{N-1}{2}}.$$

On retombe sur les formules de M. Hermite, si l'on fait $m = 3$.

CORRESPONDANCE.

I. Nous avons reçu, mais trop tard pour pouvoir les insérer, des solutions fort bonnes des Questions 856, 867, 873, par M. Constantin Harkema, étudiant à l'université de Saint-Pétersbourg.

II. D'après une lettre de M. Le Besgue, c'est à Gauss qu'il faut attribuer le théorème qui fait l'objet de la question 914 de notre dernier numéro. *Voir* les nos 31 et 71 des *Disquisitiones*.

III. C'est par erreur que nous avons attribué à M. Montcoq la solution du problème d'agrégation ; elle est de M. Daligault, ancien Instituteur primaire, Professeur au Collége de Coutances.

PROBLÈMES DONNÉS AUX EXAMENS DE LA LICENCE

Le 16 novembre 1868.

I. Trouver une surface de révolution telle, que les rayons de courbure principaux soient en chaque point égaux et dirigés en sens contraire.

II. Un mobile se meut sur un cercle ; il est sollicité par une force normale et une force attractive fonction de la distance, émanant d'un centre fixe sur le cercle. Déterminer cette fonction de la distance par la condition que la réaction normale soit constante.

QUESTIONS.

916. Trouver l'enveloppe des ellipses concentriques à aire constante dont les axes ont la même direction.

(C. HARKEMA, de Saint-Pétersbourg.)

917. Trois points d'une droite décrivent chacun une surface déterminée; tout point M de cette droite décrit en même temps une autre surface. Si pour une position déterminée de la droite on mène les normales aux surfaces décrites par chaque point, toutes ces normales appartiennent à une hyperboloïde. (MANNHEIM.)

918. Appelons : 1° *indice d'un point,* par rapport à une surface du second degré, le rapport des distances de ce point et du centre de la surface au plan polaire du point; 2° *indice d'un plan,* le produit des distances du pôle du plan et du centre de la surface à ce plan; 3° *indice d'une droite,* le rapport que l'on obtient en divisant le carré de la demi-corde déterminée, par cette droite, dans la surface, par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à la droite.

On demande de trouver d'autres expressions pour la valeur de ces indices. (H. FAURE.)

919. Lorsqu'une surface du second degré est conjuguée à un tétraèdre :

1° La somme des carrés de ses demi-axes est égale à la somme des inverses des indices des arêtes du tétraèdre;

2° La somme des carrés des inverses des demi-axes, prise en signe contraire, est égale à la somme des inverses des indices des faces du tétraèdre;

3° Le produit des carrés des demi-axes, pris en signe contraire, est égal au produit des inverses des sommets du tétraèdre, multiplié par 36 fois le carré du volume du tétraèdre. (H. Faure.)

920. On donne une surface du second degré et un plan. Si l'on prend dans ce plan trois points conjugués à la surface, la somme des inverses des indices de ces trois points est égale à l'inverse de l'indice du point où le plan est rencontré par le diamètre qui lui est conjugué.

(H. Faure.)

921. Une surface du second degré étant conjuguée à un tétraèdre, on propose de démontrer que la somme des inverses des indices des centres des sections, déterminées dans la surface par les faces du tétraèdre, est égale à — 3.

(H. Faure.)

922. Un ellipsoïde donné tourne autour d'un point fixe donné sur l'un de ses axes de symétrie, trouver le lieu des pôles d'un plan fixe donné par rapport aux diverses positions de l'ellipsoïde. (Lafont.)

923. Deux coniques semblables et semblablement placées sont tangentes en un point A. Par ce point A on mène une corde AB dans l'une des coniques, et la corde AC perpendiculaire à AB dans l'autre; on joint BC; du point A on abaisse une perpendiculaire AI sur BC, trouver le lieu du point I quand AB tourne autour du point A.

(Lafont.)

924. Par un point pris sur la développée de la parabole, on mène les normales à la parabole. Par ce point et les pieds des normales, on fait passer un cercle. Lieu décrit par le centre de ce cercle, lorsque le point décrit la développée. (Paillotte.)

EXPOSÉ DES PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS,

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(suite voir 2e série, t. VII, p. 403);

PAR UN ABONNÉ.

De la résolution des équations du premier degré.

Soient n équations du premier degré à n inconnues

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = l_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = l_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = l_n. \end{array}\right.$$

La théorie des déterminants permet de résoudre ces équations de la manière la plus simple.

Considérons le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons développer ce déterminant suivant les éléments d'une colonne quelconque. Désignons par $A_{i,k}$ le coefficient de $a_{i,k}$ dans le développement de A. Ce coefficient, comme nous l'avons fait remarquer, ne contient aucun des éléments de la ligne i ou de la colonne k, et il est, *au signe près*, le déterminant obtenu en sup-

primant la ligne et la colonne de l'élément $a_{i,k}$. On aura

$$(2)\qquad A = A_{1,k}a_{1,k} + A_{2,k}a_{2,k} + A_{3,k}a_{3,k} + \ldots + A_{n,k}a_{n,k}.$$

D'autre part, si nous remplaçons les éléments $a_{1,k}, \ldots$, de la $k^{ième}$ colonne par les éléments correspondants de la $i^{ième}$ colonne, deux colonnes deviendront identiques dans notre déterminant, et le résultat sera identiquement nul.

On aura donc

$$(3)\qquad A_{1,k}a_{1,i} + A_{2,k}a_{2,k} + \ldots + A_{n,k}a_{n,i} = 0.$$

i étant différent de k.

Cela posé, multiplions nos équations (1) respectivement par $A_{1,k}$, $A_{2,k}$, $A_{3,k}, \ldots$, $A_{n,k}$. Le coefficient de x_i sera justement le premier membre de l'équation (3), il sera donc identiquement nul. Il ne restera dans le premier membre que le terme en x_k, qui, d'après l'équation (2), sera Ax_k. On aura donc

$$Ax_k = A_{1,k}l_1 + A_{2,k}l_2 + \ldots + A_{n,k}l_n.$$

Le second membre de cette formule est le déterminant A, dans lequel on a remplacé les éléments de la $k^{ième}$ colonne par les termes constants l_1, l_2, l_n. On peut donc écrire cette formule

$$Ax_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots & a_{1,k-1} & l_1 & a_{1,k+1}\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots & a_{2,k-1} & l_2 & a_{2,k+1}\ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots & a_{n,k-1} & l_n & a_{n,k+1}\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et l'on en déduit cette règle pratique qui servira de guide dans tous les cas.

Le dénominateur commun des valeurs des inconnues est le déterminant formé avec les coefficients d

ces inconnues. Pour avoir le numérateur de l'une des inconnues, il faut remplacer les coefficients de cette inconnue dans le dénominateur par les termes constants placés dans le second membre des équations.

De l'élimination des inconnues entre $(n+1)$ équations à n inconnues du premier degré.

Pour traiter ce sujet, qui a une grande importance, nous prendrons un exemple simple. Soient les trois équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} ax + by + c &= 0,\\ a'x + b'y + c' &= 0,\\ a''x + b''y + c'' &= 0.\end{aligned}\right.$$

Il est clair que ces trois équations ne seront pas en général vérifiées par un système de valeurs de x et de y: car les valeurs qui satisferaient aux deux premières, et qui sont déterminées, ne satisferont pas en général à la troisième. Pour avoir l'équation de condition, il faudrait tirer des deux premières équations les valeurs de x et de y et les porter dans la troisième. Mais nous allons faire le calcul d'une manière plus symétrique, au moyen d'un artifice qui est dans beaucoup de questions d'une grande utilité. Posons

$$(4\ bis)\qquad x = \frac{x'}{z'},\quad y = \frac{y'}{z'},$$

et portons ces expressions de x et de y dans les équations (4); après avoir chassé les dénominateurs, nous obtiendrons les équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} ax' + by' + cz' &= 0,\\ a'x' + b'y' + c'z' &= 0,\\ a''x' + b''y' + c''z' &= 0,\end{aligned}\right.$$

qui contiennent trois inconnues au lieu de deux; mais il est évident, d'après la manière dont on les a obtenues, qu'en les divisant par z' elles ne contiendront plus que les deux rapports $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, et en général elles ne pourront être vérifiées que par les valeurs

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, elles doivent pouvoir être vérifiées par une infinité de valeurs finies, différentes de 0 de x', y', z', puisque, lorsqu'on aura x, y, x', y', z', seront définies par les équations (4 *bis*), qui ne déterminent que les rapports des trois quantités x', y', z'. Il faut donc que les équations (5) soient vérifiées par des valeurs finies de x', y', z'. Or les formules générales de résolution donnent

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} z' = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme z' n'est jamais nul, on conclut pour la condition déterminée

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, en général, le résultat de l'élimination de n inconnues entre $n+1$ équations du premier degré s'obtient en égalant à 0 le déterminant formé par les $(n+1)^2$ coefficients de ces équations.

Nous bornerons là ce que nous avions à dire sur la théorie.

APPLICATIONS.

1. *Développement des déterminants*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix},$$

. . . .

Considérons le premier de ces déterminants, nous trouvons

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= bc(c - b) + ac(a - c) + ab(b - a).$$

La forme même du déterminant nous indique que si $a = b$, le déterminant est nul, car deux lignes deviennent identiques. Donc le déterminant est divisible par $a - b$ et de même par $a - c$, $b - c$. Comme le déterminant est du troisième degré, on voit qu'il est égal au produit

$$(a - b)(a - c)(b - c)$$

multiplié par un facteur numérique: ce facteur numérique est l'unité, puisque bc^2 a dans le produit le coefficient 1 comme dans le déterminant. On aurait de

même

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c),$$

. . . .

2. *Développement du déterminant*

$$\begin{vmatrix} a & c' & b' \\ c' & b & a' \\ b' & a' & c \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est très-remarquable et se rencontre très-souvent dans les applications. On voit que les éléments placés symétriquement par rapport à la diagonale abc sont égaux. On dit que le déterminant est *symétrique*. Son développement est

$$abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2,$$

c'est-à-dire *le produit des termes en diagonale augmenté du double produit des termes non en diagonale et diminué du produit de chaque terme en diagonale par le carré du terme non en diagonale qui ne se trouve ni dans sa ligne ni dans sa colonne.*

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

$$\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = 8ACF + 2BDE - 2AE^2 - 2CD^2 - 2FB^2.$$

3. *Surface du triangle en fonction des coordonnées de ses sommets.*

Voici la règle qui est très-simple. La surface du triangle est

$$\frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix}$$

pourvu que, lorsqu'on va du point xy au point $x'y'$, puis au point $x''y''$, le mouvement de rotation autour du triangle soit dans le sens de l'axe des x vers l'axe des y. θ désigne l'angle des axes. Si le mouvement de rotation était inverse, on aurait la surface changée de signe.

Cette considération du signe est importante; elle permet par exemple d'établir en toute rigueur la surface du polygone.

4. *Équation du cercle passant par trois points.*

Cette équation est

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x'^2+y'^2 & x' & y' & 1 \\ x''^2+y''^2 & x'' & y'' & 1 \\ x'''^2+y'''^2 & x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, c'est l'équation d'un cercle, comme on peut le voir en ordonnant le déterminant par rapport aux éléments de la première colonne. Elle prend la forme

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} + Lx + My + N = 0.$$

On voit que ce cercle se réduit à une ligne droite quand le coefficient de x^2+y^2 est nul, ce qui a lieu lorsque les

trois points $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ sont en ligne droite. En effet, le coefficient de x^2+y^2 est, au signe près, la surface du triangle formé par les trois points donnés; il est donc nul quand les trois points sont en ligne droite.

Ordonnons le déterminant par rapport aux éléments de la première colonne. Nous trouvons

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} - (x'^2+y'^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}$$
$$+(x''^2+y''^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} - (x'''^2+y'''^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les déterminants qui entrent dans cette formule sont, au signe près, les surfaces des quatre triangles formés par les trois points donnés et par le point D (xy). Les termes x^2+y^2, $x'^2+y'^2$, représentent les carrés des distances à l'origine des coordonnées O, qui est un point quelconque du plan. En tenant compte de la règle que nous avons donnée pour le signe de la surface du triangle, on trouve

$$\overline{OD}^2 \text{ surf. ABC} - \overline{OA}^2 \text{ surf. BCD} + \overline{OB}^2 \text{ surf. ACD}$$
$$- \overline{OC}^2 \text{ surf. ABD} = 0 \ (^*).$$

Mais les quatre triangles étant inscrits dans un même cercle, leurs surfaces sont proportionnelles au produit des trois côtés. On a donc

$$\overline{OD}^2.AB.AC.BC - \overline{OA}^2.BC.BD.CD + \overline{OB}^2.AC.AD.CD$$
$$- \overline{OC}^2.AB.AD.BD = 0.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

C'est une relation très-importante entre les distances de quatre points sur un cercle et celles d'un cinquième point quelconque du plan aux quatre premiers. Si, par exemple, on fait coïncider le point O avec l'un des quatre points, avec A par exemple, on trouve la relation

$$AC.BD = AD.BC + AB.CD,$$

qui constitue le théorème de Ptolémée.

5. *Condition pour que l'équation du second degré représente deux droites.*

Soit

$$(6) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

l'équation proposée. Si l'équation représente une courbe à centre unique, on doit exprimer que le centre se trouve sur la courbe, et les coordonnées de ce centre doivent satisfaire aux trois équations

$$(7) \qquad \begin{cases} 2Ax + By + D = 0, \\ Bx + 2Cy + E = 0, \\ Dx + Ey + 2F = 0. \end{cases}$$

La condition cherchée est donc le déterminant symétrique

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$
$$= -2[AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC)] = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'équation représente deux droites. Cela est évident d'après notre méthode, si la courbe est à centre unique, car alors les coordonnées du centre vérifient la troisième des

équations (7); mais si la courbe est du genre parabole, si l'on a

$$B^2 - 4AC = 0,$$

notre méthode ne s'applique plus. Cependant, dans ce cas, l'équation (8) se réduit à

$$AE^2 - BDE + CD^2 = 0,$$

ou en remplaçant C par sa valeur

$$\frac{1}{4A}(2AE - BD)^2 = 0;$$

en sorte qu'on a les deux équations

$$BD - 2AE = 0,$$
$$B^2 - 4AC = 0,$$

qui expriment que l'on a une ligne de centres.

Donc, dans tous les cas, la condition que nous avons trouvée est nécessaire et suffisante.

6. *Condition pour qu'une droite*

$$(9) \qquad mx + ny + p = 0$$

soit tangente à la courbe du second degré

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

L'équation de la tangente au point $x'y'$ est

$$(10) \quad (2Ax' + By' + D)x + (Bx' + 2Cy' + E)y + Dx' + Ey' + 2F = 0.$$

Pour que cette équation représente la même droite que l'équation (9), il faut que les coefficients des deux équations soient proportionnels, c'est-à-dire que l'on ait

$$2Ax' + By' + D = \lambda m,$$
$$Bx' + 2Cy' + E = \lambda n,$$
$$Dx' + Ey' + 2F = \lambda p.$$

Il faut en outre exprimer que le point de contact se trouve sur la tangente, ce qui donne

$$mx' + ny' + p = 0.$$

On a donc à éliminer x', y', λ entre les quatre équations

$$\begin{aligned}
2Ax' + By' - \lambda m + D &= 0,\\
Bx' + 2Cy' - \lambda n + E &= 0,\\
Dx' + Ey' - \lambda p + 2F &= 0,\\
mx' + ny' + 0 \times \lambda + p &= 0.
\end{aligned}$$

Le résultat de cette élimination s'obtient en égalant à 0 le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2A & B & -m & D \\ B & 2C & -n & E \\ D & E & -p & 2F \\ m & n & 0 & p \end{vmatrix},$$

qu'on peut écrire en remplaçant l'une par l'autre les deux dernières colonnes et changeant tous les signes de la troisième :

$$\begin{vmatrix} 2A & B & D & m \\ B & 2C & E & n \\ D & E & 2F & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est symétrique. En le développant, on trouve

$$\begin{aligned}
(E^2 - 4CF)m^2 + (D^2 - 4AF)n^2 + (B^2 - 4AC)p^2 \\
+ 2mn(2BF - ED) + 2mp(2CD - BE) \\
+ 2np(2AE - BD) = 0.
\end{aligned}$$

Par exemple, pour que l'axe des x soit tangent à la

courbe, il faut que cette équation soit vérifiée par les valeurs

$$m = 0, \quad p = 0;$$

ce qui donne

$$D^2 - 4AF = 0.$$

Pour qu'une tangente puisse s'éloigner indéfiniment, il faut que l'on ait à la fois

$$m = 0, \quad n = 0;$$

ce qui donne

$$B^2 - 4AC = 0.$$

7. *Équation du plan passant par trois points.*

Cette équation est obtenue immédiatement sous la forme d'un déterminant. C'est

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, ce déterminant développé peut s'écrire

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x \begin{vmatrix} y' & z' & 1 \\ y'' & z'' & 1 \\ y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & z' & 1 \\ x'' & z'' & 1 \\ x''' & z''' & 1 \end{vmatrix} \\ & - z \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right.$$

On voit donc qu'égalé à 0 il donne l'équation d'un plan. D'ailleurs ce plan passe par les trois points $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$; car deux lignes du détermi-

nant deviennent identiques quand on remplace x, y, z par x', y', z', par exemple.

Si l'on examine les coefficients de x, y, z, on voit qu'ils représentent les surfaces des triangles formés dans les trois plans coordonnés par les projections des trois points donnés. D'après cela, désignons par S la surface du triangle formé dans l'espace par les trois points $'$, $''$, $'''$, et par α, β, γ les angles du plan avec les trois plans coordonnés. Les coefficients de x, y, z seront $S\cos\alpha$, $S\cos\beta$, $S\cos\gamma$, et l'équation du plan prendra la forme

$$(14)\qquad 2S(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation remarquable va nous conduire à deux conséquences. Appelons p la distance de l'origine au plan, le dernier terme de l'équation précédente devra être égal à $2Sp$, et l'on aura

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 2Sp;$$

donc le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

représente six fois le volume du tétraèdre ayant pour sommets l'origine et les trois points $'$, $''$, $'''$. De plus, le premier membre de l'équation (14) ou, ce qui revient au même, de l'équation (12) pourra s'écrire

$$2S(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p).$$

On aura

$$(15)\quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} = 2S(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p).$$

D'ailleurs $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$ représente, au signe près, la distance du point xyz au plan et le second membre est égal à six fois le volume du tétraèdre formé par les quatre points xyz, $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$. Si l'on désigne par V ce volume, on a donc

$$(16)\qquad 6V = \pm \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Voici la règle des signes, qui est simple.

Imaginons un observateur ayant les pieds sur le plan des trois points $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$, placé du côté du point xyz et regardant successivement ces trois points dans l'ordre précédent. Si le mouvement de rotation qu'il est obligé de faire a lieu de droite à gauche, on aura le volume avec le signe $+$; s'il est en sens contraire, il faudra changer le signe du déterminant. Nous n'insistons pas sur la démonstration de cette règle.

8. *Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cône ou un cylindre.*

Soit l'équation à trois variables

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{aligned}$$

Exprimons que le centre se trouve sur la surface. Nous

aurons les quatre équations

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + C &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C' &= 0, \\ B'x + By + A''z + C'' &= 0, \\ Cx + C'y + C''z + D &= 0. \end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination de xyz est le déterminant

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & & C'' \\ C & & C'' & D \end{vmatrix} = 0;$$

mais il se présente la même difficulté que dans le cas de deux variables.

Il est évident que si la surface a un centre, elle sera un cône; car l'équation de condition exprime en définitive que si l'on rapporte la surface à son centre le terme constant est nul. Il est encore évident que si la surface est un cylindre, cette condition est vérifiée; car on peut obtenir cette condition de la manière suivante. Résolvant les trois équations du centre, nous obtiendrons des formules de la forme

$$x = \frac{L}{\Delta}, \quad y = \frac{M}{\Delta}, \quad z = \frac{N}{\Delta};$$

portant ces valeurs dans la dernière équation, notre équation de condition sera

$$CL + C'M + C''N + D\Delta = 0.$$

Or, dans le cas où la surface représente un cylindre, on a

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad D = 0;$$

Ainsi, dans le cas où la surface est un cône ou un cylindre, l'équation (17) sera satisfaite. Mais la réciproque n'est évidente que dans le cas des surfaces à centre unique. Il faut donc établir la réciproque et montrer que, dans le cas où l'on a

$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = 0,$$

la condition (17) exprime que la surface est un cylindre. On ne peut faire ce calcul d'une manière élégante qu'en ayant recours à des propriétés nouvelles des déterminants. Mais nous allons développer les calculs. Le déterminant (17) développé devient

$$\begin{aligned} &C^2(B^2 - A'A'') + C'^2(B'^2 - AA'') + C''^2(B''^2 - AA') \\ &\quad + 2CC'(A''B'' - BB') + 2CC''(A'B' - BB'') \\ &\quad + 2C'C''(AB - B'B'' \\ &\quad + D(AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2). \end{aligned}$$

Si le déterminant des équations du centre est nul, notre condition se réduit à

$$\begin{aligned} &C^2(B^2 - A'A'') + C'^2(B'^2 - AA'') + C''^2(B''^2 - AA') \\ &\quad + 2CC'(A''B'' - BB') + 2CC''(A'B' - BB'') \\ &\qquad\qquad + 2CC''(AB - B'B'') = 0. \end{aligned}$$

Or cette équation homogène en $CC'C''$ est un carré parfait, en vertu de la condition

$$(18)\quad AA'A'' + 2BB'B'' + AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = 0,$$

comme il est facile de s'en assurer. On peut l'écrire

$$0 = \frac{1}{B^2 - A'A''}[(B^2 - A'A'')C + C'(BB' - A''B'') + C''(BB'' - A'B')^2]$$

ou

$$\frac{1}{B^2 - A'A''}\begin{vmatrix} B'' & B' & C \\ A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en permutant les lettres,

$$\frac{1}{B'^2 - AA''}\begin{vmatrix} B & B''' & C' \\ A'' & B' & C''' \\ B' & A & C \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{1}{B''^2 - A'A}\begin{vmatrix} B' & B & C'' \\ A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \end{vmatrix} = 0.$$

On reconnaît là, avec l'équation (18), la deuxième condition pour que les trois équations du centre se réduisent à deux, c'est-à-dire pour que la surface représente un cylindre, le mot *cylindre* étant pris dans son acception la plus générale.

Enfin il y aurait à examiner le cas où $B^2 - A'A''$, $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$ sont nuls simultanément; mais nous négligeons l'examen de ce cas très-particulier.

On peut, du reste, éviter cette discussion en prenant une autre propriété commune aux cônes et aux cylindres. Par exemple, on pourrait exprimer que le plan polaire passe par un point fixe ou est parallèle à une droite fixe; ce qui entraînerait l'équation

$$\begin{aligned} &\alpha(Ax + B''y + B'z + C) + \beta(B''x + A'y + Bz + C') \\ &\quad + \gamma(B'x + By + A''z + C'') + \delta(Cx + C'y + C''z + D) = 0, \end{aligned}$$

équation qui, devant être satisfaite quelles que soient les valeurs de x, y, z, conduirait d'une manière rigoureuse, et dans tous les cas, à la condition trouvée.

LOIS DE LA COURBURE DANS CERTAINES TRANSFORMATIONS DES COURBES PLANES;

Par M. Abel TRANSON.

I. Une équation à deux variables étant interprétée selon les principes du calcul directif donne lieu à un spectacle géométrique d'une variété infinie. Car si l'on suppose que l'extrémité de la variable indépendante trace sur le plan une figure quelconque, les extrémités de chacune des valeurs correspondantes de l'autre variable décrivent des figures que, dans une autre occasion, j'ai appelées les *transformantes* de la première (*). Supposons, par exemple, que l'équation soit du degré m par rapport à cette autre variable, une figure tracée par l'extrémité de la variable indépendante aura m transformantes distinctes. De là le problème de chercher les relations de ces m transformantes, soit entre elles, soit avec la figure primitive. Et déjà on sait depuis longtemps que toute région infiniment petite autour d'un point de la figure transformée est représentée par une région semblable autour du point correspondant de chacune des transformantes, de même que la région infiniment petite autour d'un point quelconque de la sphère correspond à une région semblable autour du point correspondant de sa projection stéréographique. Mais je ne crois pas que jusqu'ici personne se soit appliqué à découvrir les lois relatives à la correspondance entre les éléments du second ordre, c'est-à-dire entre les rayons de courbure de la figure primitive et ceux de ses transformantes. Tel est l'objet de la présente Note.

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 145.

II. Supposons donc que d'une équation donnée entre u et z, celle-ci variable indépendante, on ait tiré l'une des valeurs de u représentée par

$$u = f(z);$$

soient d'ailleurs x et y les coordonnées rectangulaires de l'extrémité de z, de sorte qu'on ait $z = x + iy$. Cette valeur étant substituée dans u donnera

$$f(x + iy) = \mathrm{X} + i\mathrm{Y};$$

X et Y, fonctions réelles de x et de y, seront les coordonnées rectangulaires de l'extrémité de u, et les deux équations

$$f'(x + iy) = \frac{d\mathrm{X}}{dx} + i\frac{d\mathrm{Y}}{dx},$$

$$if'(x + iy) = \frac{d\mathrm{X}}{dy} + i\frac{d\mathrm{Y}}{dy},$$

donneront les relations connues

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = -\frac{d\mathrm{X}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{Y}}{dy} = \frac{d\mathrm{X}}{dx}, \quad \frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{Y}}{dy^2} = 0,$$

lesquelles permettent d'exprimer toute relation où entrent les dérivées partielles de X et de Y au moyen des dérivées d'une seule de ces deux fonctions; de sorte qu'on a, par exemple, pour les différentielles totales du premier ordre,

$$(1) \qquad d\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{X}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{X}}{dy}dy,$$

$$(2) \qquad d\mathrm{Y} = -\frac{d\mathrm{X}}{dy}dx + \frac{d\mathrm{X}}{dx}dy.$$

III. Il est facile d'établir la similitude des régions infiniment voisines autour de deux points correspondants. Menons, en effet, par l'origine des variables directives une droite ot parallèle à la tangente de la transformée au

point x, y, et une drote OT parallèle à la tangente de la transformante au point correspondant (X, Y); l'angle Tot, que nous appellerons ω, sera déterminé par la formule

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{dx\,dY - dy\,dX}{dx\,dX + dy\,dY}.$$

Substituant les valeurs ci-dessus de dX et de dY, il vient après réduction

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\omega = -\frac{\frac{dX}{dy}}{\frac{dX}{dx}}.$$

Cette valeur dépend de x et de y, c'est-à-dire de la situation du point transformé; mais elle ne dépend pas des directions particulières de ot et de OT, c'est-à-dire que les tangentes relatives à deux courbes correspondantes, et par conséquent aussi les deux normales, font entre elles un angle constant. En même temps, si l'on désigne par la lettre m le rapport des deux éléments correspondants dS et ds, on trouvera

$$m = \sqrt{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2},$$

valeur qui dépend aussi de la situation du point (x, y), mais qui, elle aussi, est indépendante de la direction des éléments dS et ds. On voit que m est le *rapport de similitude* des deux régions correspondantes. Ces régions *semblables* ne sont pas *semblablement placées*. L'angle ω marque la différence de leur orientation. Il était d'ailleurs indispensable de donner ici la détermination de cet angle et celle du rapport de similitude, parce que ces deux grandeurs vont figurer dans la relation entre les éléments du second ordre.

IV. Le rayon de courbure de la transformante a pour expression

$$R = \frac{[(dX)^2 + (dY)^2]^{\frac{3}{2}}}{dX\,d^2Y - dY\,d^2X},$$

et on verra que sa valeur dépend à la fois de la direction des tangentes *ot* et OT (ou ce qui est la même chose des normales correspondantes), et aussi du rayon de courbure de la transformée au point (x, y). Toutefois, pour faciliter l'exposition des résultats, je supposerai d'abord que la transformée est rectiligne, de sorte que les différentielles premières dx et dy pourront avoir un rapport quelconque d'où résultera la direction de l'élément ds; mais les différentielles secondes d^2x et d^2y seront d'abord supposées nulles.

Dans cette supposition les différentielles secondes de X et de Y seront respectivement

$$(5) \qquad d^2X = \frac{d^2X}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2X}{dx\,dy}\,dx\,dy - \frac{d^2X}{dx^2}\,dy^2,$$

$$(6) \qquad d^2Y = -\,\frac{d^2X}{dx\,dy}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2X}{dx^2}\,dx\,dy + \frac{d^2X}{dx\,dy}\,dy^2,$$

de sorte qu'après substitution le dénominateur de R pourra être écrit comme il suit :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2X}{dx^2}\,[(dy^2 - dx^2)\,dY + dx\,dy\,dX] \\ &\qquad + \frac{d^2X}{dx\,dy}\,[(dy^2 - dx^2)\,dX - 2\,dx\,dy\,dY]. \end{aligned} \right.$$

Pour interpréter cette expression, appelons β l'angle que la normale à la transformante fait avec la direction positive, et $\alpha = \beta - \omega$ l'angle que la normale à la transformée fait avec cette même direction, on aura les rela-

tions suivantes :

$$\frac{dX}{\pm\sin\beta} = \frac{dY}{\mp\cos\beta} = \sqrt{dX^2 + dY^2},$$

$$\frac{dx}{\pm\sin(\beta-\omega)} = \frac{dy}{\mp\cos(\beta-\omega)} = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Enfin déterminons un nouvel angle ε par les conditions

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{\cos\varepsilon} = \frac{\frac{d^2X}{dx\,dy}}{\sin\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2X}{dx\,dy}\right)^2};$$

alors on trouvera aisément que le rayon R s'exprime en fonction des angles β, ω, ε et du rapport de similitude précédemment déterminé ; on trouvera, dis-je,

$$R = \frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2X}{dx\,dy}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\cos(\beta - 2\omega - \varepsilon)}.$$

Dans cette expression, β est la seule quantité qui varie avec la direction de la transformée rectiligne. Si R' est la valeur de R correspondante à $\beta = 2\omega + \varepsilon$; et si l'on appelle γ l'angle entre les directions de R et de R', on aura

$$R = \frac{R'}{\cos\gamma}.$$

Les extrémités de R sont donc situées sur une perpendiculaire élevée à l'extrémité de R' ; d'où résulte cette première proposition :

Théorème I. — *Toutes les droites passant par un même point du plan tranformé ont pour transformantes des courbes dont les centres de courbure relatifs au point correspondant sont sur une même droite.*

V. Supposons maintenant que la transformée soit une

courbe quelconque dont le rayon de courbure au point (x, y) soit représenté par ρ.

Il faudra modifier les valeurs (5) et (6) de d^2X et de d^2Y en leur ajoutant respectivement

$$(5') \qquad \frac{dX}{dx} d^2x + \frac{dX}{dy} d^2y,$$

$$(6') \qquad -\frac{dX}{dy} d^2x + \frac{dX}{dx} d^2y.$$

Le dénominateur (7) de R s'augmentera alors d'une quantité qu'on pourra écrire sous la forme suivante :

$$(7') \qquad \frac{\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2\right](dx^2 + dy^2)^2}{\rho}.$$

D'ailleurs, si l'on introduit comme précédemment dans la première partie (7) du dénominateur les angles β, ω, ε, et, par suite, l'angle γ et aussi la détermination de R', il viendra pour l'inverse de R la formule suivante :

$$(8) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos\gamma}{R'} + \frac{1}{m\rho}.$$

La première remarque à faire, c'est que dans le cas où u, c'est-à-dire $f(z)$, est une fonction linéaire de z, la valeur de R se réduit à $R = m\rho$, parce que R' est alors infini, comme contenant en dénominateur la racine carrée de $\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2X}{dx\,dy}\right)^2$. C'est qu'alors à une figure des z correspond une seule transformante qui lui est absolument semblable, parce que l'orientation ω et le rapport de similitude m sont les mêmes pour tous les points du plan transformé. Il est de force alors que le rayon de courbure de la transformante soit proportionnel à celui de la transformée.

Mais maintenant, u étant une fonction quelconque de z, supposons que par le point (x, y) passent plusieurs courbes ayant en ce point des directions différentes, mais le même rayon de courbure ρ. Dans la formule (8) l'angle γ et le rayon R seront les seules variables ; et alors si, conservant l'origine des coordonnées transformantes, on dirige un nouvel axe des X dans la direction de R', et un nouvel axe des Y perpendiculairement à cette direction, il viendra, pour le lieu des centres de courbure des lignes transformantes, l'équation

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{m\rho}{R'}(R' - X).$$

C'est une conique ayant l'origine pour foyer, et la droite $R' - X = 0$ pour directrice, conique qui peut être l'une quelconque des trois courbes du second ordre selon la valeur de ρ. De là cette proposition générale :

Théorème II. — *Si plusieurs courbes passant en un point a de la figure primitive ont en ce point le même rayon de courbure ρ, les rayons de courbure correspondants de toutes leurs transformantes seront les rayons vecteurs d'une même conique ayant pour foyer le point* A, *transformant du point a. Cette conique variera d'espèce avec la valeur de ρ; mais sa directrice sera fixe, étant la droite à laquelle se réduit la conique elle-même lorsque ρ est infini.*

Nota.—Il y a des rapprochements curieux à faire entre la projection stéréographique des figures sphériques et la transformation des figures planes au moyen de l'équation entre deux variables directives. On sait déjà, comme nous l'avons rappelé au commencement de cette Note, que la région sphérique infiniment petite autour d'un point

donné de la sphère est semblable à la région qui lui correspond en projection; mais de plus on a les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Tous les grands cercles qui passent par un même point de la sphère ont pour projections des cercles dont les centres sont en ligne droite.*

Théorème II. — *Si plusieurs cercles de même rayon ρ passent par un même point de la sphère, les centres des cercles qui leur correspondent en projection stéréographique sont sur une même conique dont l'espèce dépend de la grandeur de ρ.*

La démonstration de ces deux théorèmes est facile. Je laisse au lecteur le soin de compléter le second en décidant si les coniques relatives à diverses valeurs ρ ont le même foyer et la même directrice.

SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES PRODUITS INFINIS;

Par M. A. GENOCCHI.

Il me semble que les théorèmes généraux sur la convergence des produits infinis peuvent être établis d'une manière tout à fait élémentaire et très simple en suivant à peu près la marche tracée par M. Weierstrass (*), et en s'aidant de la *formule de Nicole* que j'ai citée dans une autre occasion (**). Voici comment on pourrait exposer cette théorie.

(*) Crelle, t. LI, p. 18-53.

(**) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1867

1. On a l'identité, que j'appelle *formule de Nicole*,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a-b} = \dfrac{1}{a+v_0} + \dfrac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)} \\ \qquad + \dfrac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + \dfrac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_{n-1})}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)} \\ \qquad + \dfrac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)(a-b)}; \end{cases}$$

en multipliant par $b-a$, et portant le dernier terme dans le premier membre, on peut lui donner la forme

$$(2)\quad \begin{cases} \left(1+\dfrac{b-a}{a+v_0}\right)\left(1+\dfrac{b-a}{a+v_1}\right)\cdots\left(1+\dfrac{b-a}{a+v_n}\right) \\ \quad = 1 + \dfrac{b-a}{a+v_0} + \dfrac{(b+v_0)(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)} \\ \quad + \dfrac{(b+v_0)(b+v_1)(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + \dfrac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_{n-1})(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_{n-1})(a+v_n)}. \end{cases}$$

Ainsi le premier membre est un produit de $n+1$ facteurs qui se développe dans une somme de $n+1$ termes; lorsque cette somme convergera vers une limite déterminée et finie pour des valeurs de n indéfiniment croissantes, il en sera de même du produit, qui alors sera appelé *convergent*, et cette limite sera la *valeur du produit infini*. Si la somme n'a pas de limite, le produit n'en aura pas non plus; et, par suite, la formule (2) transforme le produit dans une série, de manière qu'il sera

convergent, divergent ou indéterminé comme la série elle-même.

2. En faisant

$$\frac{b-a}{a+v_n} = u_n,$$

d'où

$$1 + u_n = \frac{b+v_n}{a+v_n},$$

la formule (2) deviendra

$$(3)\quad \begin{cases} (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n) \\ \qquad = 1 + u_0 + (1+u_0)u_1 + (1+u_0)(1+u_1)u_2 + \ldots \\ \qquad\quad + (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})u_n, \end{cases}$$

formule presque équivalente, due à Euler (*), qui ne diffère pas au fond de celle de Nicole.

Si $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont des quantités positives, on peut tirer de la formule (3)

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n) > 1 + u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n;$$

donc si la série Σu_n est composée de termes tous positifs et divergente, le produit $\Pi(1+u_n)$ croît au delà de toute limite comme la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

3. En changeant le signe des quantités u_n, on aura

$$(4)\quad \begin{cases} (1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_n) \\ \qquad = 1 - u_0 - (1-u_0)u_1 - (1-u_0)(1-u_1)u_2 - \ldots \\ \qquad\quad - (1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_{n-1})u_n; \end{cases}$$

(*) *Novi Comment. Acad. Petropol.*, t. V, p. 76.

et si les quantités u_n sont positives et inférieures à l'unité, il s'ensuivra

$$(1 - u_0)(1 - u_1)\ldots(1 - u_n) > 1 - u_0 - u_1 - u_2 - \ldots - u_n,$$

puisque les facteurs supprimés dans le second membre seront aussi moindres que l'unité. On peut en déduire que si la série Σu_n composée de termes positifs est convergente, le produit $\Pi(1 - u_n)$ ne peut avoir pour limite zéro. Soit s, en effet, la somme de cette série : en supprimant, s'il faut, les premiers termes de la série et les facteurs correspondants du produit, on peut supposer $s < 1$, et comme on aura

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n < s,$$

on conclura

$$\Pi(1 - u_n) > 1 - s.$$

Donc le produit surpassera toujours une quantité positive déterminée. Il faut, évidemment, qu'aucune des quantités u_n ne soit égale à 1.

4. Dans le même cas, c'est-à-dire la série Σu_n étant composée de termes positifs et convergente, le produit $\Pi(1 + u_n)$ ne pourra pas augmenter à l'infini; car son inverse $\Pi\left(\frac{1}{1 + u_n}\right) = \Pi\left(1 - \frac{u_n}{1 + u_n}\right)$ ne peut avoir zéro pour limite, puisque la série $\Sigma\left(\frac{u_n}{1 + u_n}\right)$, dont les termes sont positifs et plus petits que les termes correspondants de la série Σu_n, sera à plus forte raison convergente (n° 3).

Si, au contraire, la série Σu_n est divergente, ses termes étant positifs et inférieurs à l'unité, le produit $\Pi(1 - u_n)$ aura pour limite zéro. En effet, son inverse

$\Pi\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = \Pi\left(1+\frac{u_n}{1-u_n}\right)$ augmente indéfiniment (n° 2), puisque la série $\Sigma\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right)$, ayant ses termes positifs et plus grands que les termes correspondants de la série Σu_n, sera aussi divergente.

5. Si la série Σu_n est composée de termes positifs et convergente, chacun des produits $\Pi(1+u_n)$, $\Pi(1-u_n)$ sera aussi convergent, et sa valeur sera toujours différente de zéro pourvu qu'aucune des quantités u_n dans le second produit ne soit égale à l'unité.

La formule (2) fournit non-seulement la démonstration de ce théorème, mais développe en série convergente la valeur du produit. Soit, en effet,

$$w_n = \frac{b+v_0}{a+v_0}\cdot\frac{b+v_1}{a+v_1}\cdots\frac{b+v_{n-1}}{a+v_{n-1}}\cdot\frac{a-b}{a+v_n}.$$

Si les quantités a, b, v_n sont positives et $a > b$, on aura

$$0 < w_n < \frac{a-b}{a+v_n},$$

et la formule (2) donnera

$$\Pi\left(1-\frac{a-b}{a+v_n}\right) = 1 - \Sigma w_n.$$

Or : 1° en omettant, s'il faut, les premiers termes et facteurs, on pourra supposer $u_n < 1$, et alors on pourra faire $u_n = \frac{a-b}{a+v_n}$, ce qui donnera $w_n < u_n$; par conséquent, la série Σw_n sera convergente comme Σu_n et le produit $\Pi(1-u_n)$ aura la même limite que $1-\Sigma w_n$, limite différente de zéro (n° 3) : 2° en prenant l'inverse

du premier membre on aura

$$\Pi\left(1+\frac{a-b}{b+v_n}\right)=\frac{1}{1-\Sigma w_n},$$

et l'on pourra faire $u_n=\dfrac{a-b}{b+v_n}$: le produit $\Pi(1+u_n)$ ne pourra pas augmenter à l'infini (n° 4), et aura une limite déterminée en fonction de la somme de la série Σw_n, qui sera convergente, parce que, b étant $< a$, on aura $w_n < u_n$.

6. Au moyen de ces propositions on démontre aisément un théorème d'Abel. Si deux séries à termes positifs Σu_n, Σw_n sont liées par la relation

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=(1+u_n)\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

elles seront toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Car en posant

$$\frac{w_n}{u_n}=v_n,$$

il viendra

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=1+u_n;$$

d'où, en prenant successivement $n=0, 1, 2,\ldots,$ et multipliant, on tire

$$v_n=v_0(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1});$$

mais si la série Σu_n est convergente, le produit $\Pi(1+u_n)$ est aussi convergent, et, par suite, reste au-dessous d'une quantité k, et, si la série Σu_n est divergente, ce produit peut surpasser toute quantité finie: donc on aura, dans le premier cas, $v_n < kv_0$, $w_n < kv_0\,u_n$, et dans le second $v_n > kv_0$, $w_n > kv_0\,u_n$. Ainsi, dans le premier cas, la série

Σw_n sera convergente; dans le second, elle sera divergente comme la série Σu_n.

Ce théorème découle encore plus simplement de la formule (3). En effet, si la série Σu_n est convergente, le produit formant le premier membre est aussi convergent, et comme on peut représenter le second membre par $1 + \Sigma w_n$, les quantités w_n vérifiant la relation ci-dessus, il faut que la série Σw_n soit de même convergente. Si la série Σu_n est divergente, il est évident que la série Σw_n sera aussi divergente, puisque $\frac{w_{n+1}}{w_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On satisfait à la relation qui lie les deux séries en supposant

$$u_n = \frac{w_n}{a + w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1}},$$

où nous désignons par a une constante quelconque; et l'on parvient ainsi à l'énoncé sous lequel Abel a fait connaître son théorème.

7. Si le terme général u_n est imaginaire, soit ρ_n son module, et supposons que la série $\Sigma \rho_n$ soit convergente : le produit $\Pi(1 + u_n)$ sera aussi convergent. Car, en vertu du théorème d'Abel, la série

$$1 + \rho_0 + (1 + \rho_0)\rho_1 + (1 + \rho_0)(1 + \rho_1)\rho_2 + \ldots$$

est convergente en même temps que la série $\Sigma \rho_n$; mais, ses termes n'étant pas inférieurs aux modules des termes de l'autre série

$$1 + u_0 + (1 + u_0)u_1 + (1 + u_0)(1 + u_1)u_2 + \ldots,$$

il faut que celle-ci soit aussi convergente : donc est convergent le produit $\Pi(1 + u_n)$, qui, d'après la formule (3), est égal à la somme des $n + 1$ premiers termes de cette série.

8. Soit

$$i = \sqrt{-1}, \quad T_n = (1 + it_0)(1 + it_1)\ldots(1 + it_n).$$

Si les quantités t_n sont réelles et positives, et que la série Σt_n soit divergente, mais la série $\Sigma (t_n)^2$ soit convergente, le produit T_n sera indéterminé pour n infini.

En effet :

1° En posant

$$T_n = P_n + iQ_n,$$

on aura

$$P_n^2 + Q_n^2 = (1 + t_0^2)(1 + t_1^2)\ldots(1 + t_n^2),$$

et ce produit convergera (n° 5) vers une limite finie et déterminée que nous nommerons λ^2. Donc P_n et Q_n n'augmentent pas indéfiniment.

2° Nous avons

$$P_n + iQ_n = (1 + it_n)(P_{n-1} + iQ_{n-1}),$$

d'où

$$P_n - P_{n-1} = -t_n Q_{n-1}, \quad Q_n - Q_{n-1} = t_n P_{n-1}.$$

Donc chacune de ces différences peut devenir aussi petite qu'on voudra, puisque, Q_{n-1} et P_{n-1} étant finis, le facteur t_n devient infiniment petit, sans quoi la série $\Sigma (t_n)^2$ ne serait pas convergente. En remplaçant n successivement par $n+1$, $n+2, \ldots, n+r$, et ajoutant, on trouve

$$\begin{aligned} P_{n+r} - P_{n-1} &= -(t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+r})\,Q', \\ Q_{n+r} - Q_{n-1} &= (t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+r})\,P', \end{aligned}$$

où P' et Q' désignent deux moyennes : la première entre $P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_{n+r-1}$; la deuxième entre $Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}, \ldots, Q_{n+r-1}$. Or les premiers membres sont toujours finis, mais la somme $t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+r}$ augmente à l'infini avec r, car la série Σt_n est divergente; il

faudra donc que les facteurs P' et Q' s'approchent indéfiniment de zéro.

3° Maintenant prenons n et r si grands, que d'une part la différence entre deux termes consécutifs de la suite P_{n-1}, P_n, $P_{n+1}, \ldots$, et de l'autre le facteur P' soient en valeur absolue au-dessous d'une quantité donnée ε aussi petite qu'on voudra. Si tous les termes de cette suite sont de même signe, un d'entre eux, au moins, sera moindre que P' et partant que ε : dans le cas contraire il y aura deux termes consécutifs de signes différents, et chacun d'eux sera moindre que leur différence et partant que ε. Les mêmes remarques s'appliquent à la suite Q_{n-1}, Q_n, $Q_{n+1}, \ldots$; ainsi P_n et Q_n peuvent s'approcher de zéro tant qu'on voudra pour des valeurs indéfiniment croissantes de n.

4° Mais comme $P_n^2 + Q_n^2$ a pour limite λ^2, il faudra que, pour Q_n très-voisin de zéro, P_n soit très-voisin de λ, et réciproquement. Donc ces quantités s'approchent aussi indéfiniment de λ.

Donc la quantité $T_n = P_n + iQ_n$, toujours finie, n'a pas de limite fixe (*).

9. En faisant $u_n = it_n$, on pourra développer le produit T_n par la formule (3). On obtiendra une série Σw_n dont le terme général sera

$$w_n = (1 + it_0)(1 + it_1)\ldots(1 + it_{n-1})\, it_n,$$

et qui sera indéterminée comme le produit. Mais dans ce terme général le produit $(1 + it_0)(1 + it_1)\ldots(1 + it_{n-1})$ reste toujours fini, son module ayant pour limite λ, tandis que le facteur it_n a pour limite zéro : on a donc une série

(*) Cette démonstration est due à M. Weierstrass.

indéterminée dont le terme général a pour limite zéro, lorsque son rang *n* croît à l'infini.

On a quelquefois admis comme évident qu'une série ne peut être indéterminée lorsque son terme général décroît indéfiniment. On voit que les démonstrations fondées sur ce *postulatum* ne sont pas exactes.

10. Soit

$$u_n = p_n + iq_n, \quad \frac{q_n}{1 + p_n} = t_n, \quad \text{T}_n \text{ comme ci-dessus;}$$

nous aurons

$$\Pi(1 + u_n) = (1 + p_0)(1 + p_1)\ldots(1 + p_n)\text{T}_n.$$

Si les parties réelles p_n n'ont pas pour limite -1, et que la série Σq_n^2 soit convergente, la série Σt_n^2 sera aussi convergente, et le module du produit T_n aura une limite finie, car on pourra assigner un nombre positif $h < (1 + p_n)^2$, et l'on aura $t_n^2 < \frac{q_n^2}{h}$. D'ailleurs en supposant la série Σp_n divergente et les quantités p_n de même signe, le produit $\Pi(1 + p_n)$ augmente sans limite dans le cas de $p_n > 0$, et a pour limite zéro dans le cas de $p_n < 0$, $-p_n < 1$. Donc le produit $\Pi(1 + p_n)$ convergera aussi dans le second cas vers la limite zéro, et dans le premier croîtra indéfiniment.

Dans le cas de $p_n < 0$, où la limite de $\Pi(1 + u_n)$ est zéro, la série Σw_n, par laquelle ce produit est exprimé dans la formule (3), sera convergente, et l'on aura la relation

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}(1 + u_n).$$

On trouve ainsi un théorème analogue à celui d'Abel (nº 6).

Si la série Σp_n est convergente, et reste convergente lorsqu'on réduit ses termes à leurs valeurs numériques, le produit $\Pi(1+p_n)$ est convergent (n° 7). Si d'un autre côté les quantités q_n sont de même signe, et que la série Σq_n soit divergente, la série Σq_n^2 convergente, le produit T_n sera indéterminé pour n infini (n° 9), car on pourra supposer $p_n^2 < 1$, et trouver deux nombres positifs h et k tels que

$$h < (1+p_n)^2, \quad k > 1+p_n,$$

d'où l'on conclura que les quantités t_n seront toutes de même signe, que la série Σt_n sera divergente, et la série Σt_n^2 convergente. Donc, dans les mêmes circonstances, le produit $\Pi(1+u_n)$ sera aussi indéterminé pour n infini.

Ces résultats comprennent, comme cas particuliers, plusieurs théorèmes de Gauss et de M. Weierstrass.

11. En posant

$$a = 2m+3, \quad b = 2m+2, \quad v_n = 2n,$$

et multipliant par $2m$, la formule (1) donne

$$2m = \frac{2m}{2m+3} + \frac{2m}{2m+3}\cdot\frac{2m+2}{2m+5} + \frac{2m}{2m+3}\cdot\frac{2m+2}{2m+5}\cdot\frac{2m+4}{2m+7} + \ldots,$$

équation obtenue par M. Sarrus dans le seul cas de m entier et positif à l'aide de calculs et de principes plus élevés (*). Il la regardait comme un « résultat remarquable qu'il serait peut-être difficile d'obtenir *à priori* et qui peut faciliter les réductions dans certains calculs »; et M. Gergonne demandait si la même formule aurait lieu pour m fractionnaire ou négatif. Or, d'après la for-

(*) *Annales de Mathématiques*, par Gergonne, t. X, p. 229.

mule (1) nous avons aussi le terme complémentaire $\frac{2m+2}{2m+3} \cdot \frac{2m+4}{2m+5} \cdots \frac{2m+2n+2}{2m+2n+3}$ égal au produit

$$\left(1 - \frac{1}{2m+3}\right)\left(1 - \frac{1}{2m+5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2m+2n+3}\right)$$

multiplé par $2m$; et comme la série $\Sigma \frac{1}{2m+2n+3}$ est divergente, ce produit aura zéro pour limite (n° 4), pourvu toutefois qu'aucun des dénominateurs $2m+3$, $2m+5, \ldots$ ne soit nul. Nous pouvons donc affirmer que la formule de M. Sarrus est vraie même pour des valeurs fractionnaires ou négatives de m, à l'exception seulement de celles qui donneraient $-m-\frac{1}{2}$ égal à un nombre entier et positif.

12. Faisant $a = 1$, $b = 1 - m$, $\nu_n = n$, on tire de la même formule (1) l'égalité (*)

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

et le terme complémentaire du second membre est

$$\pm \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)(m-n-1)}{1.2\ldots n(n+1)},$$

ou

$$\pm\left(1 - \frac{m}{1}\right)\left(1 - \frac{m}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\left(1 - \frac{m}{n+1}\right);$$

la série $\Sigma \frac{m}{n}$ étant divergente, ce produit aura pour limite

(*) Posons $a = 0$, $b = A$, $\nu_n = -\alpha_n$: la formule de Nicole donne aussi l'identité générale

$$0 = 1 - \frac{A}{\alpha_0} + \frac{A(A-\alpha_0)}{\alpha_0\alpha_1} - \frac{A(A-\alpha_0)(A-\alpha_1)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + \ldots$$

Voir *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XVIII, p. 118, 219, 233. J. B.

zéro tant que m sera positif (n° 4). Ainsi la formule du binôme $(1+x)^m$ est justifiée dans le cas de $x=-1$, si l'exposant m est >0.

La démonstration fondée sur le théorème de Taylor dans laquelle on emploie une expression du terme complémentaire ayant pour facteur la puissance $(1-\theta)^{m-1}$ et dépendant ainsi du nombre variable θ, n'est pas exacte pour $m<1$, puisque ce facteur augmenterait indéfiniment si le nombre θ s'approchait indéfiniment de l'unité.

13. Considérons enfin le produit

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots(n+1)},$$

en supposant m imaginaire. On peut le mettre sous la forme

$$\pm\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right);$$

puis, en posant $m=m'+im''$, comme la série $\Sigma\frac{m'+1}{n}$ est divergente et que la série $\Sigma\left(\frac{m''}{n}\right)^2$ est convergente, on verra (n° 10) que ce produit a pour limite zéro lorsque la valeur de $m'+1$ est positive.

Cette proposition permet de juger de l'exactitude de la formule du binôme dans le cas de $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$ si l'exposant m reçoit des valeurs imaginaires : cas particulier omis dans tous les Traités, mais dont s'est occupé Abel dans un célèbre Mémoire.

On démontrera de la même manière que la formule de M. Sarrus, rappelée au n° 11, continue d'être exacte lorsque m est imaginaire.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 865

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 191);

PAR M. WICKERSHEIME,
Élève de l'École Polytechnique.

On circonscrit à une surface de vis à filet carré une surface développable dont les divers plans tangents sont parallèles aux plans tangents à un cône du second degré, la projection de la courbe de contact sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'héliçoïde est une podaire de conique. (LAGUERRE-VERLY.)

La question proposée peut être énoncée ainsi : « Une surface développable étant circonscrite à une surface de vis à filet carré et à une conique A (*) située à l'infini, trouver la projection de la courbe de contact sur un plan perpendiculaire à l'axe. »

Je me propose de trouver les points du lieu qui sont sur un rayon quelconque OM du cercle qui sert de base au cylindre sur lequel est tracée l'hélice directrice de la surface. Cette droite est la projection d'une infinité de génératrices de cette surface. Soit O'M' l'une de ces génératrices. On peut faire passer par cette droite deux plans tangents à la conique A, et ces deux plans toucheront la surface de vis en deux points dont la projection sur le plan horizontal (l'axe de l'hélice étant

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

supposé vertical) donnera deux points du lieu situé sur OM. Il est clair que par chacune des autres génératrices projetées en OM on peut de même faire passer deux plans tangents à la conique A; mais ces plans seront parallèles à ceux dont je viens de parler, et leurs points de contact se projetteront tous aux deux points dont je viens de parler.

Pour étudier le lieu cherché, il suffit donc de considérer la génératrice particulière O′M′, OM. En général, un plan quelconque étant mené par cette droite, pour trouver son point de contact avec la surface de vis, on pourra se servir d'un paraboloïde de raccordement ayant pour plan directeur le plan horizontal et pour directrices l'axe $\omega o'$ de l'hélice et la tangente à cette courbe au point M; la seconde génératrice du paraboloïde passant au point de contact passera par le point de rencontre de la trace horizontale du plan donné avec la trace horizontale OT de la surface; de plus, cette seconde génératrice ayant pour plan directeur le plan vertical MT, sa projection horizontale sera perpendiculaire à OM. Donc, si $\theta\alpha$ et $\theta'\alpha'$ sont les traces horizontales des deux plans que l'on peut mener par la génératrice O′M′ tangentiellement à A, les droites $\alpha\mu$ et $\alpha'\mu'$, perpendiculaires à OM, couperont cette dernière droite en des points du lieu situés sur OM. Le lieu est donc la projection du point O sur l'enveloppe des droites telles que $\mu\alpha$ et $\mu'\alpha'$. Cette enveloppe est une courbe de deuxième classe, car, d'après ce qui précède, on ne peut lui mener que deux tangentes parallèles à une direction donnée. D'où la solution de la question proposée.

La démonstration qui précède montre qu'en général, *si une surface développable a pour cône directeur un cône de $n^{ième}$ classe, la projection de la courbe de contact sur le $n^{ième}$ plan perpendiculaire à l'axe est la podaire*

d'une courbe de $n^{ième}$ classe. Dans la question actuelle, on peut se proposer de chercher dans quel cas la courbe aura une branche infinie. Il faut nécessairement que la courbe enveloppe des droites telles que $\mu\alpha$, $\mu'\alpha'$ soit une parabole, par conséquent que l'une de ces droites soit toujours à l'infini. Le plan horizontal passant par la génératrice O'M' doit donc être tangent à la conique A; en d'autres termes, le cône du second degré directeur de la surface développable doit être tangent à un plan horizontal.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Théorie élémentaire des quantités complexes ; par J. Hoüel, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — Première Partie : *Algèbre des quantités complexes ;* 1867 (64 p.). — Deuxième Partie : *Théorie des fonctions uniformes ;* 1869 (144 p.) — 1 vol. grand in-8 en deux fascicules, etc. — Paris, Gauthier-Villars, libraire, quai des Augustins, 55. — Prix : 1re Partie, 2 fr. 50 c. ; 2e Partie, 4 fr.

Les premiers inventeurs de l'Algèbre, lorsqu'une équation n'admettait pas de solutions réelles, se contentaient de la dire *impossible*. Plus tard, à mesure que la théorie des équations fit des progrès, on s'aperçut que les théorèmes découverts pour les équations qui ont toutes leurs racines positives exigent, pour être étendus à toute espèce d'équations, non-seulement que l'on prenne en considération les racines négatives, que jusqu'au temps de Descartes on a nommées racines *fausses*, mais encore que l'on compte comme racines certains symboles dépourvus en apparence de toute signification réelle et se ramenant tous à l'indication de l'opération impossible

marquée par le signe $\sqrt{-1}$. On donna à ces expressions le nom de racines *impossibles* ou *imaginaires*.

Bientôt Moivre, guidé par les analogies qui existent entre le cercle et l'hyperbole équilatère, découvrit le célèbre théorème qui porte son nom, et c'est de cette découverte que date l'introduction des symboles imaginaires comme un auxiliaire important dans l'Analyse des quantités réelles. La théorie de ces symboles fut fondée dans le siècle dernier, principalement par les travaux d'Euler et de d'Alembert, et c'est Cauchy qui, de nos jours, y a mis la dernière main.

Cependant, quelque légitimes que soient les démonstrations fondées sur le théorème de Moivre et l'emploi purement symbolique des imaginaires, il faut avouer que ce procédé laisse toujours dans l'esprit une certaine obscurité, et il n'est pas étonnant que de bons esprits n'y aient vu qu'une sorte de procédé mnémonique, dont il serait dangereux de poursuivre l'emploi en dehors des limites dans lesquelles on peut soumettre les résultats à un contrôle indépendant des symboles en question.

Aussi a-t-on cherché, dès le milieu du XVIII[e] siècle, à donner une autre base à cette méthode, qui s'annonçait comme si féconde, et à laquelle il ne semblait manquer que d'être suffisamment sûre. Ces tentatives, d'abord infructueuses, ont été reprises avec succès par le Genevois Robert Argand, que l'on doit regarder comme le vrai fondateur de la théorie *réelle* des symboles dits *imaginaires*. Les travaux d'Argand, qui datent de 1806, et qui ont été rappelés en 1813 dans le recueil si connu des *Annales de Gergonne*, n'en ont pas moins passé presque inaperçus, et la preuve, c'est que la théorie d'Argand a été *réinventée* un grand nombre de fois, tant en France qu'à l'étranger. Nous n'oserions même pas répondre qu'après l'adoption définitive de ces idées par Cauchy,

dans les dernières années de sa vie, et la pleine justice qu'il a rendue, dans le dernier volume de ses *Exercices d'Analyse*, aux mérites d'Argand, cette doctrine soit bien connue de tous les géomètres contemporains, et qu'on ne la réinvente pas encore quelque jour, du moins en France, le seul pays où elle n'ait pas encore pénétré dans l'enseignement classique.

Pour Argand et ses successeurs, l'impossibilité des opérations indiquées par le symbole $\sqrt{-1}$ tient uniquement à la signification trop restreinte que l'on attribue à l'idée de quantité et aux opérations représentées par les signes de l'Algèbre. Toute quantité absolue ou *arithmétique* peut être représentée géométriquement par un segment porté sur un axe dans une seule direction déterminée. Toute quantité *algébrique*, c'est-à-dire positive ou négative, peut être représentée par un segment porté sur un axe suivant l'une ou l'autre des deux directions opposées, qui font entre elles un angle égal à deux angles droits. Si l'on étend au plan entier le champ de la représentation des quantités, on sera amené à considérer les quantités représentées par des droites de longueur et de direction quelconques. Une telle droite constitue ce que Cauchy nomme une quantité *géométrique*.

Une quantité géométrique est déterminée au moyen de deux nombres (coordonnées, soit rectilignes, soit polaires), de sorte que les opérations faites sur les quantités géométriques portent à la fois sur ces deux nombres.

L'addition correspond à la construction en Mécanique de la composition des forces ou des vitesses. La multiplication se compose de la multiplication des modules et de l'addition des arguments, ces derniers se comportant comme des logarithmes. Au moyen de ces définitions, toute opération sur les quantités géométriques (ou *complexes*, comme on les appelle plus généralement) se ra-

mène à une construction géométrique *réelle*, dont les résultats peuvent être représentés par des nombres réels : de sorte que cette théorie bannit complétement de l'Algèbre les nuages dont semblait entouré le mot d'*imaginaire*.

A ce point de vue, le théorème de Moivre (*) n'est plus autre chose qu'une représentation algébrique d'un théorème géométrique sur les projections d'un contour polygonal, et de ce théorème on déduit de la manière la plus simple et la plus directe toutes les formules de la Trigonométrie plane.

En définissant l'exponentielle à exposant imaginaire comme le résultat de la substitution d'une variable imaginaire à une variable réelle dans le développement de e^x en série, on obtient immédiatement les formules d'Euler qui lient les fonctions circulaires aux exponentielles; puis on est conduit à étendre au cas des variables complexes les définitions des logarithmes et des fonctions circulaires inverses.

Tel est, en résumé, le contenu de la *première Partie* du traité de M. Hoüel, intitulée : *Algèbre des Quantités complexes*. Avant d'entrer en matière, l'auteur rappelle en quelques pages l'historique de la question, et pour servir d'introduction à l'étude des quantités complexes, il indique comment on pourrait remplacer avec avantage, dans la théorie des quantités négatives, les considérations arithmétiques, qui conduisent à en faire de purs symboles, par des considérations fondées sur la *notation géométrique* et remplaçant le symbole par la réalité. De là il passe au développement des idées d'Argand et aux conséquences analytiques qu'on en a tirées.

Dans l'étude des fonctions susceptibles de plusieurs va-

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VII, p. 84.

leurs, M. Hoüel passe entièrement sous silence les déterminations désignées par Cauchy sous le nom de *valeurs principales*. Il a pensé, sans doute, que la considération de ces valeurs, reposant sur des conventions souvent arbitraires, ne sert qu'à compliquer l'énoncé des théorèmes et à créer des distinctions qui n'ont rien d'essentiel dans les applications. Aussi les géomètres allemands ne font-ils aucune mention de ces valeurs, dont on peut toujours éviter l'emploi.

La *seconde Partie*, récemment publiée, de l'ouvrage de M. Hoüel contient, sous le titre de *Théorie des Fonctions uniformes*, les principaux résultats des découvertes de Cauchy, avec les simplifications importantes dues aux travaux qui ont été faits en Allemagne.

Cauchy considérait toute quantité déterminée par la valeur d'une quantité complexe comme une *fonction* de cette quantité. Cette définition convenant généralement à toute fonction de deux variables indépendantes, il a fallu, pour obtenir des fonctions pouvant se traiter par les mêmes règles que les fonctions d'une seule variable, se borner à une classe particulière de fonctions, que Cauchy appelle fonctions *monogènes*. Riemann et son école ont pris tout d'abord le mot *fonction* avec sa définition restreinte, ce qui dispense de reproduire, dans chaque énoncé le mot *monogène*. Cette définition des fonctions, suivie de considérations sur la continuité et sur le nombre des valeurs d'une fonction, forme l'objet du Chapitre Ier.

Dans le Chapitre suivant, M. Hoüel expose les théorèmes fondamentaux de Cauchy sur les intégrales prises le long d'un contour donné, en empruntant à Riemann les principales démonstrations. Les intégrales prises le long d'un contour quelconque renfermant des points de discontinuité se ramènent aux intégrales prises le long de contours infiniment petits tracés autour de ces points, et

auxquelles Cauchy, partant d'autres considérations, a donné le nom *de résidus*. Toute fonction continue et *uniforme* (ou *monodrome*) à l'intérieur d'un contour donné peut s'exprimer sous forme de résidu, et c'est de cette expression que Cauchy a tiré son beau théorème, qui contient comme cas particulier le théorème de Taylor, et qui a été généralisé par P. Laurent.

Le Chapitre III est consacré à l'étude d'une fonction dans le voisinage d'un *zéro* ou d'un *infini*. L'ordre infinitésimal de la fonction est exprimé par le résidu de sa dérivée logarithmique.

Tant que l'on choisit le plan pour champ de représentation d'une variable complexe, on ne saisit pas bien l'analogie qui existe entre les résultats correspondants aux valeurs nulles et aux valeurs infinies de la variable. Cette analogie ressort avec évidence lorsqu'on adopte un mode de représentation qui permet de fixer un point réel et déterminé pour répondre aux valeurs infinies de la variable. C'est ce qu'a fait Riemann, en reportant sur la sphère, à l'aide de la projection stéréographique, tous les points du plan, y compris ceux qui sont à l'infini. M. Neumann a complété cette construction au moyen d'un nouveau plan, qu'il appelle le plan *antipode*, et dont les points correspondent aux valeurs inverses $\frac{1}{z}$ de la variable indépendante z.

Dans le Chapitre IV, consacré à cette étude, M. Hoüel reproduit, d'après les ouvrages de MM. Durège et Neumann, les démonstrations de divers théorèmes, établis d'une autre manière par Cauchy, et donne un aperçu des recherches de Riemann sur la détermination, au moyen du *Principe de Dirichlet*, d'une fonction dont on connaît les valeurs sur un contour donné et les points de discontinuité à l'intérieur de ce contour.

Le Chapitre V traite de différentes applications analytiques des théories précédentes :

1° Théorèmes de Cauchy sur la détermination du nombre des racines d'une équation comprises dans une aire donnée. Extension du théorème de Sturm aux racines imaginaires.

2° Développement des fonctions en série périodique en partant du théorème de Laurent. Application à la fonction perturbatrice.

3° Série de Bürmann, d'où celle de Lagrange se déduit comme cas particulier. Conditions de convergence de cette série. Application au problème de Kepler : dans ce dernier calcul, on voit bien l'utilité de la notation des fonctions hyperboliques et des Tables de ces fonctions, telles que celles que M. Hoüel a publiées dans son *Recueil de formules et de Tables numériques*.

4° Décomposition d'une fonction en une série, finie ou infinie, de fractions simples. La considération du reste de la série, dans le cas d'un nombre infini de termes, donne au développement la rigueur indispensable.

5° Du développement en fractions simples du logarithme d'une fonction, on déduit le développement de la fonction en un produit infini.

6° La partie la plus importante de ce Chapitre traite du calcul des intégrales définies. L'Auteur ramène au théorème fondamental du Chapitre II les méthodes données à diverses reprises par Cauchy pour la détermination de classes très-générales d'intégrales définies. Il précise certaines conditions, vaguement indiquées par Cauchy, et nécessaires pour la validité des formules, et son travail facilite singulièrement la lecture du beau et difficile Mémoire que Cauchy a publié dans les *Annales de Gergonne*, et que M. l'abbé Moigno a reproduit en partie dans ses *Leçons de Calcul intégral*.

Dans ces deux fascicules, M. Hoüel a rassemblé, avec la lucidité d'exposition d'un professeur expérimenté, les plus importants résultats et les démonstrations les plus simples que contiennent les ouvrages allemands qui ont traité le même sujet. Il y a joint quelques perfectionnements de détail qui lui appartiennent en propre. Un tel travail, consciencieusement exécuté, avec des prétentions modestes, pourra rendre d'utiles services aux commençants, en leur épargnant la plupart des difficultés qui rebutent si souvent le lecteur qui aborde sans préparation les œuvres des inventeurs.

Puisse l'accueil que recevra cet Ouvrage encourager l'Auteur à tenir sa promesse de donner dans une *troisième Partie* un exposé des théories de Riemann, encore si peu répandues dans notre pays, et que nos voisins cultivent avec tant d'ardeur et de succès!

QUESTIONS.

925. Démontrer qu'en développant, suivant les puissances ascendantes de λ, la quantité

$$\frac{x + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{1.2}x + \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4}x + \ldots}{1 + \frac{\lambda}{1}x + \frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{\lambda^3}{1.2.3}x + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4} + \ldots} = \frac{e^{\lambda}(1+x) - e^{-\lambda}(1-x)}{e^{\lambda}(1+x) - e^{-\lambda}(1-x)},$$

le coefficient de λ^n est un polynôme L_n du $n^{\text{ième}}$ degré en x, contenant le facteur $x^2 - 1$, et que l'équation

$$\frac{L_n}{x^2 - 1} = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. (Ch. Hermite.)

926. Étant données deux équations

$$f(x, z) = 0, \quad \varphi(y, z) = 0;$$

trouver quelles relations doivent exister entre les coefficients, pour que ces équations représentent un cercle.

En supposant que ces relations existent, déterminer le centre de ce cercle, la direction de son plan, la longueur de son rayon.

Application numérique :

$$25y^2 + 24zy + 153z^2 - 76y + 258z - 695 = 0,$$
$$25x^2 + 72xz + 160z^2 + 22x + 248z - 1487 = 0.$$

(J.-Ch. Dupain.)

927. Former l'équation des coniques qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui passent par deux points : l'un réel ayant pour coordonnées

$$x = a, \quad y = b;$$

l'autre imaginaire ayant pour coordonnées

$$x = a\sqrt{-1}, \quad y = -b\sqrt{-1}.$$

Trouver ensuite le lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y. (J.-Ch. Dupain.)

928. Former l'équation des coniques qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui passent par deux points imaginaires conjugués : l'un de ces points ayant pour coordonnées

$$x = a(\cos 45^\circ + \sqrt{-1}\sin 45^\circ),$$
$$y = b(\cos 45^\circ - \sqrt{-1}\sin 45^\circ).$$

Trouver ensuite le lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y. (J.-Ch. Dupain.)

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(suite, voir 2e série, t. VII, p. 157),

Par M. L. PAINVIN.

---

§ VI. — *L'équation en λ a deux couples de racines égales.*

30. Lorsque l'équation en λ a deux couples de racines égales, les trois cas suivants peuvent se présenter :

Premier cas. — *Les deux cônes* (A) *et* (B) *correspondant respectivement aux racines doubles sont des cônes proprement dits.*

Les deux surfaces ont en commun l'arête AB *qui joint les sommets des deux cônes ; elles se touchent aux points* A *et* B.

Réciproquement, *lorsque les deux surfaces se touchent en deux points distincts d'une génératrice commune, l'équation en λ a deux racines doubles, et les cônes correspondant à ces racines doubles sont des cônes proprement dits.*

Les points A *et* B *sont les seuls points ayant même plan polaire par rapport aux deux surfaces ; le plan polaire de* A *est le plan* BAD, *tangent commun en* A ; *le plan polaire de* B *est le plan* ABC, *tangent commun en* B *aux deux surfaces.*

La courbe d'intersection des deux surfaces se compose de la génératrice commune AB *et d'une courbe rencontrée en trois points par un plan quelconque : cette courbe*

est donc du troisième ordre, c'est la CUBIQUE GAUCHE.

Les droites AD *et* BC, *intersections des cônes* (A) *et* (B) *par les plans tangents communs aux deux surfaces, sont les tangentes en* A *et* B *à la courbe gauche.*

Un plan quelconque, passant soit par AD, *soit par* BC, *coupe les deux snrfaces suivant deux coniques osculatrices; le contact est du second ordre.*

DEUXIÈME CAS. — *L'un des cônes,* (A) *par exemple, est un cône proprement dit; le second cône* (B) *se réduit à un système de deux plans.*

Les deux surfaces se touchent en trois points, et ne sont pas circonscrites l'une à l'autre; elles se touchent d'abord au point A, *sommet du cône proprement dit; le plan tangent commun coupe les deux surfaces suivant les deux mêmes droites* AB *et* AD. *Le système de ces deux droites est la première des sections planes communes aux deux surfaces; le plan tangent commun* BAD *est un des plans du système* (B). *L'autre section plane est une conique proprement dite, située dans le second plan* BDC *du systéme* (B) *et sur le cône ayant son sommet en* A. *Cette conique rencontre l'intersection des deux plans en* B *et* D; *en ces points elle est tangente aux droites* BC *et* DC, *intersections de son plan avec les plans tangents au cône* (A) *suivant les droites* AB *et* AD. *Les plans* ABC *et* ADC *touchent respectivement en* B *et* D *les deux surfaces.*

Tous les points de la droite BD, *intersection des deux plans du système* (B), *ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ces plans polaires passent par la droite* AC, *intersection des plans tangents communs aux deux surfaces en* B *et* D. *Le sommet* A *a même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ce plan polaire est le plan tangent commun en* A.

Troisième cas. — *Les deux cônes* (A) *et* (B) *se réduisent à un système de deux plans.*

Les deux surfaces se coupent suivant quatre droites, c'est-à-dire sont circonscrites au quadrilatère ADBCA *formé par les intersections des plans de chaque système entre eux, abstraction faite des arêtes de ces systèmes.*

Les deux surfaces se touchent en quatre points ; les plans ADB, ACB, CBD, DAC *touchent respectivement les deux surfaces aux points* D, C, B, A.

Tous les points de l'arête AB *ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces : ces plans passent par* CD ; *tous les points de l'arête* CD *ont également même plan polaire par rapport aux deux surfaces : ces plans passent par* AB.

31. Prenons les sommets des deux cônes correspondant respectivement aux racines doubles pour sommets A et B du tétraèdre de référence, désignons par λ_0 et λ_1 les racines doubles de l'équation en λ.

Si les équations des deux surfaces sont

$$(1)\qquad \begin{cases} (S) & A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + \ldots + 2A_{34}zt = 0, \\ (T) & B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + \ldots + 2B_{34}zt = 0, \end{cases}$$

l'équation du cône correspondant à la racine double λ_0 sera

$$(B_{11} + \lambda_0 A_{11})x^2 + (B_{22} + \lambda_0 A_{22})y^2 + \ldots + 2(B_{34} + \lambda_0 A_{34})zt = 0;$$

ce cône devant avoir son sommet en A, son équation ne devra renfermer que les variables y, z, t ; on aura donc

$$(2)\qquad \frac{B_{11}}{A_{11}} = \frac{B_{12}}{A_{12}} = \frac{B_{13}}{A_{13}} = \frac{B_{14}}{A_{14}} = -\lambda_0.$$

De même, le cône correspondant à la racine λ_1 devant

avoir son sommet en B, son équation ne devra renfermer que les variables x, z, t; on aura, par suite,

$$(3) \qquad \frac{B_{21}}{A_{21}} = \frac{B_{22}}{A_{22}} = \frac{B_{23}}{A_{23}} = \frac{B_{24}}{A_{24}} = -\lambda_1.$$

Puisque les racines λ_0 et λ_1 sont différentes, on conclut d'abord de la comparaison des relations (2) et (3) :

$$A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0;$$

les équations des deux surfaces s'écriront alors

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & A_{11} x^2 + 2 A_{13} xz + 2 A_{14} xt + A_{22} y^2 \\ & \qquad + 2 A_{23} yz + 2 A_{24} yt + A_{33} z^2 + 2 A_{34} zt + A_{44} t^2 = 0, \\ & -\lambda_0 (A_{11} x^2 + 2A_{13} xz + 2 A_{14} xt) \\ & -\lambda_1 (A_{22} y^2 + 2A_{23} yz + 2A_{24} yt) + B_{33} z^2 + 2B_{34} zt + B_{44} t^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations des deux cônes sont respectivement

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & [A] \ (\lambda_0 - \lambda_1)(A_{22} y^2 + 2A_{23} yz + 2A_{24} yt) + (B_{33} + \lambda_0 A_{33}) z^2 \\ & \qquad + 2 (B_{34} + \lambda_0 A_{34}) zt + (B_{44} + \lambda_0 A_{44}) t^2 = 0, \\ & [B] \ (\lambda_1 - \lambda_0)(A_{11} x^2 + 2A_{13} xz + 2A_{14} xt) + (B_{33} + \lambda_1 A_{33}) z^2 \\ & \qquad + 2 (B_{34} + \lambda_1 A_{34}) zt + (B_{44} + \lambda_1 B_{44}) t^2 = 0; \end{aligned} \right.$$

et l'équation en λ devient

$$(6) \ (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31}(\lambda - \lambda_0) & A_{32}(\lambda - \lambda_1) & B_{33} + \lambda A_{33} & B_{34} + \lambda A_{34} \\ A_{41}(\lambda - \lambda_0) & A_{42}(\lambda - \lambda_1) & B_{43} + \lambda A_{43} & B_{44} + \lambda A_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut, en outre, exprimer que le déterminant qui figure dans cette équation s'annule pour $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$; on a ainsi les deux équations suivantes, qui doivent être

vérifiées simultanément

$$(7)\qquad A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32}(\lambda_0-\lambda_1) & B_{33}+\lambda_0 A_{33} & B_{34}+\lambda_0 A_{34} \\ A_{42}(\lambda_0-\lambda_1) & B_{43}+\lambda_0 A_{43} & B_{44}+\lambda_0 A_{44}\end{vmatrix}=0,$$

$$(7')\qquad A_{22}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31}(\lambda_1-\lambda_0) & B_{33}+\lambda_1 A_{33} & B_{34}+\lambda_1 A_{34} \\ A_{41}(\lambda_1-\lambda_0) & B_{43}+\lambda_1 A_{43} & B_{44}+\lambda_1 A_{44}\end{vmatrix}=0.$$

Ces deux relations peuvent être vérifiées de quatre manières différentes : en égalant à zéro le premier facteur de la relation (7), on écrit que les deux surfaces passent par le sommet A ; en égalant à zéro le second facteur, on écrit que le cône (A) se réduit à deux plans.

Nous aurons donc à examiner les trois cas suivants :

1° Les deux cônes (A) et (B) sont des cônes proprement dits ;

2° Un des cônes est un cône proprement dit, et l'autre se réduit à deux plans ;

3° Les deux cônes (A) et (B) se réduisent respectivement à un système de deux plans.

I. *Les deux cônes* (A) et (B) *sont des cônes proprement dits.*

32. Dans ce cas, on a

$$(1°)\qquad A_{11}=0,\quad A_{22}=0;$$

et on voit que la droite AB est tout entière sur les deux surfaces, car les équations (4) sont alors vérifiées par $z=0$ et $t=0$.

Les deux surfaces se touchent en A ($y=0$, $z=0$, $t=0$) ; le plan tangent commun est $f'_x=0$, ou

$$A_{13}z+A_{14}t=0;$$

elles se touchent également en B ($x=0$, $z=0$, $t=0$); le plan tangent commun est $f'_y=0$, ou

$$A_{23}z+A_{24}t=0.$$

Or ces deux plans tangents en des points différents d'une même génératrice ne peuvent pas se confondre si les surfaces ne sont pas des cônes; on peut d'ailleurs le constater directement à l'aide des équations (4). Nous pouvons donc prendre le premier de ces plans pour face ABD du tétraèdre de référence, et le second pour face ABC; ce qui revient à supposer

$$(2^\circ) \qquad A_{14}=0, \quad A_{23}=0.$$

Nous remarquerons, après avoir introduit les hypothèses (1°) et (2°) dans les équations (4), que le coefficient A_{13} ne peut pas être nul, autrement les surfaces se réduiraient à des cônes. Ainsi les équations des deux surfaces pourront se ramener à cette première forme

$$(8) \qquad \begin{cases} az^2+ct^2+2bzt+2dyt+2xz=0, \\ a_1z^2+c_1t^2+2b_1zt+2d_1yt+2xz=0. \end{cases}$$

Ces deux équations nous montrent que « les deux surfaces ont en commun la droite AB, et elles se touchent aux points A et B, sommets respectifs des deux cônes passant par leur courbe d'intersection. »

Réciproquement : « Lorsque deux surfaces du second ordre se touchent en deux points distincts d'une génératrice commune, l'équation en λ a deux racines doubles, et les cônes correspondant à ces racines doubles sont des cônes proprement dits. »

La démonstration de cette réciproque n'offre pas de difficulté.

33. On peut encore simplifier les équations (8) des deux surfaces.

Le cône ayant son sommet en A a pour équation

$$(9)\quad (a-a_1)z^2+(c-c_1)t^2+2(b-b_1)zt+2(d-d_1)yt=0;$$

ce cône touche le plan ABC, ou $t=0$, suivant l'arête AB; de plus, il coupe le plan ABD, ou $z=0$, suivant les deux droites

$$(c-c_1)t^2+2(d-d_1)yt=0.$$

On ne peut pas supposer $d=d_1$, car alors le cône (9) se réduirait à deux plans; le cône (9) coupe donc le plan ABD suivant deux droites distinctes, dont l'une est AB; prenons la seconde pour arête AD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons

$$(1^\circ)\qquad c_1=c.$$

Le plan tangent à ce cône suivant AD sera distinct du plan ADB; nous pourrons alors le prendre pour la face ADC du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que le plan $y=0$ devra toucher le cône (9), ce qui donne

$$(2^\circ)\qquad b_1=b.$$

Eu égard aux hypothèses faites, l'équation du cône ayant son sommet en B devient

$$(10)\qquad \frac{ad_1-a_1d}{d_1-d}z^2+ct^2+2bzt+2xz=0.$$

Ce cône touche le plan ABD, ou $z=0$, suivant la droite AB, et il coupe le plan ABC, ou $t=0$, suivant les deux droites

$$\frac{ad_1-a_1d}{d_1-d}z^2+2xz=0.$$

Ces droites sont distinctes, l'une d'elles est BA; nous prendrons la seconde pour arête BC du tétraèdre de ré-

férence, ce qui revient à supposer

$$(3^o) \qquad \frac{a_1}{a} = \frac{d_1}{d} = k.$$

Le plan tangent à ce cône suivant BC sera distinct du plan BCA, nous pourrons alors le prendre pour la face CBD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que le plan $x = 0$ devra toucher le cône (10), ce qui donne

$$(4^o) \qquad b = 0, \quad \text{d'où} \quad b_1 = 0.$$

Ainsi : A et B étant les sommets des deux cônes, AB la génératrice commune, BAD le plan tangent commun aux deux surfaces en A, ABC le plan tangent commun en B; de plus, AB et AD étant la section du cône (A) par le plan BAD, et DAC étant le plan tangent à ce cône suivant l'arête AD; BA et BC étant la section du cône (B) par le plan BAC, et BCD étant le plan tangent à ce cône suivant l'arête BC; *les équations des deux surfaces, rapportées à ce tétraèdre, se présenteront sous la forme :*

$$(11) \qquad \begin{cases} [S] & 2xz + ct^2 + az^2 + 2dyt = 0, \\ [T] & 2xz + ct^2 + k(az^2 + 2dyt) = 0. \end{cases}$$

Les équations des cônes (A) et (B) seront respectivement

$$(12) \qquad \begin{cases} [A] & az^2 + 2dyt = 0, \\ [B] & ct^2 + 2xz = 0; \end{cases}$$

et l'équation en λ devient

$$(13) \qquad (\lambda + 1)^2(\lambda + k)^2 = 0.$$

Remarque. — On trouve une grande analogie entre les équations réduites (11) du présent numéro et les formes réduites (20) du n° 22; il y a néanmoins pour ces deux cas une différence essentielle : dans le cas actuel, les deux surfaces et les deux cônes ont une génératrice

commune, ce qui n'a pas lieu dans l'hypothèse examinée au n° 22.

34. Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) par rapport à chacune des surfaces (11), ont respectivement pour équations

$$(14)\quad \begin{cases} z_0 x + dt_0 y + (x_0 + az_0) z + (ct_0 + dy_0) t = 0, \\ z_0 x + k\,dt_0 y + (x_0 + k\,az_0) z + (ct_0 + k\,dy_0) t = 0. \end{cases}$$

De là on conclut :

« Les points A et B sont les seuls points ayant même » plan polaire par rapport aux deux surfaces, ce sont les » plans tangents communs en A et B.

» Les plans polaires d'un point quelconque situé sur » AB sont distincts, et ils passent tous par AB; ce sont » des plans tangents.

» Les plans polaires d'un point quelconque situé sur » AC sont distincts, et passent par BD, et inversement. »

35. Un plan quelconque passant par AB, coupe les deux surfaces suivant deux droites; AB étant une droite commune, il reste deux autres droites qui, par leur intersection, décrivent la courbe commune aux deux surfaces.

« La courbe d'intersection des deux surfaces se com- » pose de la génératrice commune AB et d'une courbe » rencontrée en trois points par un plan quelconque : » cette courbe est la *cubique gauche*.

» La cubique gauche passe par A et B; AD et BC sont » respectivement les tangentes en A et B. »

En effet, le cône (A) est coupé par le plan DAB, tangent commun en A aux deux surfaces, suivant les deux droites AB et AD : ce sont les tangentes au point double de la courbe d'intersection des deux surfaces; or la

courbe d'intersection se compose de la cubique gauche et de la corde AB, et elle a effectivement, comme courbe composée, deux points doubles A et B.

Un plan quelconque passant par la génératrice commune ne rencontre la cubique gauche qu'en un seul point; la chose est évidente, puisque A et B sont déjà deux points de la cubique.

36. « Un plan quelconque passant par la droite AD » coupe les deux surfaces suivant des coniques oscula» trices, le contact est du second ordre, la tangente » commune est AD; la même propriété a lieu pour la » droite BC. »

Si l'on considère, en effet, un plan quelconque passant par AD, savoir :

$$y = \alpha z, \tag{15}$$

et si l'on remplace y par αz dans les équations (11), il vient

$$(16)\quad \begin{cases} ct^2 + \alpha z^2 + 2d\alpha zt + 2xz = 0, \\ ct^2 + k\alpha z^2 + 2dk\alpha zt + 2xz = 0; \end{cases}$$

ce sont des cônes de même sommet sur lesquels se trouvent les sections des surfaces (11) par le plan (15). Si l'on assimile ces équations à celles de deux coniques, on trouve, pour l'équation en μ,

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu + 1 & 0 \\ \mu + 1 & \alpha(\mu + k) & d\alpha(\mu + k) \\ 0 & d\alpha(\mu + k) & c(\mu + 1) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad (\mu + 1)^3 = 0;$$

cette équation a ses trois racines égales; d'ailleurs, les cordes communes correspondant à la racine -1 sont distinctes; par conséquent, les cônes (16) sont osculateurs, et le contact est du second ordre; donc, etc.

II. *Le cône* (A) *est un cône proprement dit, le cône* (B) *se réduit à deux plans.*

37. D'après l'analyse du n° 31, on a, dans ce cas, les deux relations

$$(17)\qquad A_{11}=0,\quad \begin{vmatrix} 0 & A_{13} & A_{14} \\ A_{31}(\lambda_1-\lambda_0) & B_{33}+\lambda_1 A_{33} & B_{34}+\lambda_1 A_{34} \\ A_{41}(\lambda_1-\lambda_0) & B_{43}+\lambda_1 A_{43} & B_{44}+\lambda_1 A_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Le plan tangent en A aux deux surfaces (4), n° 31, est $f'_x=0$, ou

$$A_{13}z+A_{14}t=0;$$

ce plan est le même pour chacune des deux surfaces; prenons-le pour face ABD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons $A_{14}=0$; les équations (4), n° 31, des deux surfaces deviennent alors

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &2A_{13}xz+A_{22}y^2+2A_{23}yz \\ &\quad+2A_{24}yt+A_{33}z^2+2A_{34}zt+A_{44}t^2=0, \\ &2\lambda_0 A_{13}xz+\lambda_1(A_{22}y^2+2A_{23}yz+A_{24}yt) \\ &\quad\quad+B_{33}z^2+2B_{34}zt+B_{44}t^2=0; \end{aligned}\right.$$

et celles des cônes sont

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &[A]\quad (\lambda_0-\lambda_1)(A_{22}y^2+2A_{23}yz+2A_{24}yt) \\ &\qquad\quad+(B_{33}+\lambda_0 A_{33})z^2+2(B_{34}+\lambda_0 A_{34})zt \\ &\qquad\qquad\quad+(B_{44}+\lambda_0 A_{44})t^2=0, \\ &[B]\quad 2(\lambda_1-\lambda_0)A_{13}xz+(B_{33}+\lambda_1 A_{33})z^2 \\ &\qquad\quad+2(B_{34}+\lambda_1 A_{34})zt+(B_{44}+\lambda_1 A_{44})t^2=0. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas que nous étudions, le sommet du cône (A) est en A et déterminé; mais celui du cône (B) est indéterminé, et est un quelconque des points de l'intersection des deux plans qui constitue le système (B)

Le coefficient A_{14} étant nul, la seconde des relations (17) devient

$$A_{13}^2(B_{44} + \lambda_1 A_{44}) = 0;$$

mais A_{13} ne peut pas être nul, autrement les deux surfaces (18) seraient des cônes; on doit donc avoir

$$(1^\circ) \qquad B_{44} + \lambda_1 A_{44} = 0;$$

les plans (B) ont alors pour équation

$$z[(B_{33} + \lambda_1 A_{33})z + 2(B_{34} + \lambda_1 A_{34})t + 2(\lambda_1 - \lambda_0)A_{13}x] = 0.$$

Leur droite d'intersection se trouve dans la face DAB déjà choisie; elle ne peut pas d'ailleurs passer par le point A, car il faudrait pour cela que A_{13} fût nul; nous pouvons donc la choisir pour arête BD du tétraèdre de référence, et prendre pour face DBC le deuxième des plans (B), ce qui revient à supposer

$$(2^\circ) \qquad B_{33} + \lambda_1 A_{33} = 0, \quad B_{34} + \lambda_1 A_{34} = 0.$$

D'après cela, les équations (18) des deux surfaces pourront s'écrire

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &2A_{13}xz + A_{22}y^2 + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt \\ &\qquad + A_{33}z^2 + 2A_{34}zt + A_{44}t^2 = 0, \\ &2B_{13}xz + A_{22}y^2 + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt \\ &\qquad + A_{33}z^2 + 2A_{34}zt + A_{44}t^2 = 0; \end{aligned} \right.$$

celles des plans (B) et du cône (A) sont respectivement

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &[B] \qquad xz = 0, \\ &[A] \quad A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{23}yz \\ &\qquad + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0. \end{aligned} \right.$$

Jusqu'ici nous n'avons choisi, dans le tétraèdre de référence, que le sommet A, la face BAD, l'arête BD et le

plan DBC; le sommet B lui-même n'est pas déterminé, c'est un point quelconque de l'arête BD.

Le plan ABD, ou $z = 0$, coupe les deux surfaces (20) suivant les deux droites communes

$$A_{22}y^2 + 2A_{24}yt + A_{44}t^2 = 0;$$

ces deux droites ne peuvent pas coïncider, autrement on aurait

$$A_{24}^2 = A_{22}A_{44},$$

et les surfaces (20) se réduiraient à des cônes; nous prendrons donc ces deux droites pour arêtes AB et AD, puisqu'elles passent par le sommet A déjà choisi, c'est-à-dire que nous supposerons

$$(3^o) \qquad A_{22} = 0, \quad A_{44} = 0.$$

Les trois sommets A, B, D du tétraèdre se trouvent alors déterminés, ainsi que la face DBC. D'ailleurs le coefficient A_{24} ne saurait être nul, car les surfaces (20) se réduiraient à des plans; les équations (20) de ces deux surfaces pourront donc s'écrire

$$(22) \qquad \begin{cases} yt + ayz + bzt + cz^2 + dxz = 0, \\ yt + ayz + bzt + cz^2 + d_1xz = 0; \end{cases}$$

l'équation du cône (A) est alors

$$(23) \qquad (A) \quad yt + ayz + bzt + cz^2 = 0.$$

Le cône (A) est coupé par le plan $z = 0$ suivant les deux droites distinctes AB et AD; prenons pour face DAC le plan tangent à ce cône suivant AD, c'est-à-dire que, pour $y = 0$, on devra avoir deux droites coïncidentes, ce qui donne $b = 0$; puis prenons pour face BAC le plan tangent au cône (A) suivant AB, il en résultera $a = 0$.

Les équations des deux surfaces se ramènent donc à la forme définitive

$$(24)\quad \begin{cases} [S] & yt + cz^2 + d\,xz = 0, \\ [T] & yt + cz^2 + d_1 xz = 0, \\ & \text{ou} \\ & yt + z(cz + dx) = 0, \\ & yt + z(cz + d_1 x) = 0; \end{cases}$$

et l'équation du cône (A) est

$$(25)\qquad (A)\quad yt + cz^2 = 0.$$

38. Les deux surfaces (S) et (T) ont en commun deux droites, savoir :

$$z = 0,\quad y = 0,\quad \text{ou}\quad AD,$$
$$z = 0,\quad t = 0,\quad \text{ou}\quad AB;$$

ces deux droites se coupent au point de contact des deux surfaces, et sont situées dans le plan ABD, ou $z = 0$, du système (B).

Le second plan CBD du système (B) coupe les deux surfaces suivant la conique

$$yt + cz^2 = 0,$$

tangente aux deux droites CB et DC, la corde des contacts est la droite DB.

Ainsi : « Lorsque l'équation en λ a deux racines dou-
» bles, que l'un des cônes (A) est un cône proprement
» dit, et que l'autre (B) est un système de deux plans,
» les deux surfaces se coupent suivant deux courbes
» planes, et se touchent en trois points sans être circon-
» crites l'une à l'autre. Le premier point de contact est
» le sommet A du cône proprement dit ; le plan tangent
» commun coupe les deux surfaces suivant les deux

» mêmes droites AB et AD : c'est la première courbe
» plane commune ; le plan tangent commun est un des
» plans du système (B).

» L'autre courbe plane commune est une conique pro-
» prement dite, située dans le second plan du système (B)
» et sur le cône (A) ; elle est tangente, en B et D où elle
» rencontre l'intersection des deux plans (B), aux droites
» intersections de son plan avec les plans tangents au
» cône (A) suivant les génératrices AB et AD de ce cône
» situées dans le plan tangent commun en A aux deux
» surfaces. Les plans ADC et ABC touchent les deux sur-
» faces en D et B. Ainsi les deux surfaces se touchent
» aux trois points A, B, D. »

La réciproque est vraie ; on la démontre en choisissant le même tétraèdre de référence que ci-dessus, et en écrivant que les deux surfaces satisfont aux conditions imposées.

39. Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) par rapport aux deux surfaces (24), ont pour équations

$$(26) \quad \begin{cases} dz_0 x + t_0 y + (dx_0 + 2cz_0) z + y_0 t = 0, \\ d_1 z_0 x + t_0 y + (d_1 x_0 + 2cz_0) z + y_0 t = 0. \end{cases}$$

On constate aisément les propriétés qui suivent :

« Tous les points de l'intersection BD des deux plans
» du système (B) ont même plan polaire par rapport aux
» deux surfaces, et ces plans passent par la droite AC,
» intersection des plans tangents au cône (A) suivant
» les droites AB et AD communes aux deux surfaces.

» Le sommet A a même plan polaire par rapport aux
» deux surfaces : ce plan polaire est le plan tangent com-
» mun. Ce sont les seuls points qui aient même plan po-
» laire par rapport aux deux surfaces. »

On verra encore que :

« Les pôles des plans passant par BD sont distincts par
» rapport à chacune des surfaces, et se meuvent sur AC,
» et inversement. »

III. *Les deux cônes* (A) *et* (B) *se réduisent à un système de deux plans.*

40. Je prendrai d'abord deux de ces plans pour faces ABC et ABD du tétraèdre de référence; les équations des deux surfaces sont de la forme

$$(27)\left\{\begin{array}{l} A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy \\ \qquad + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy \\ \qquad + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2B_{34}zt = 0; \end{array}\right.$$

l'équation en λ possède alors une racine double, et l'équation du cône, correspondant à l'autre racine λ_1, est

$$(28)\left\{\begin{array}{l} A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ \qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2\dfrac{B_{34} + \lambda_1 A_{34}}{\lambda_1 + 1}zt = 0. \end{array}\right.$$

Cette équation doit représenter deux plans; or aucun de ces plans ne peut se confondre avec un des premiers; car si l'un des plans (28) coïncidait avec le plan ABD par exemple, on verrait, en prenant l'autre pour face ADC (ce qui serait alors permis), que les deux surfaces se réduisent à des plans. On peut donc choisir les plans représentés par l'équation (28) pour face CDA et CDB du tétraèdre de référence; l'équation (28) devant se réduire à $xy = 0$, on aura

$$\begin{array}{lllll} A_{11} = 0, & A_{22} = 0, & A_{33} = 0, & A_{44} = 0, & A_{13} = 0, \\ A_{14} = 0, & A_{23} = 0, & A_{24} = 0, & B_{34} + \lambda_1 A_{34} = 0. & \end{array}$$

Les équations des deux surfaces se ramènent alors à la forme définitive

$$(29)\quad \begin{cases} (S) & xy + azt = 0, \\ (T) & xy + a_1 zt = 0. \end{cases}$$

Le tétraèdre de référence est maintenant parfaitement déterminé; on voit que les deux surfaces ont en commun les quatre droites

AD, DB, BC, CA.

« Ainsi : lorsque l'équation en λ a deux racines égales, » et que les cônes correspondants se réduisent à deux » systèmes de plans, les deux surfaces se coupent suivant » quatre droites, c'est-à-dire sont circonscrites au qua- » drilatère gauche formé par les intersections des sys- » tèmes de plans entre eux, abstraction faite des arêtes » de chaque système.

» Les deux surfaces se touchent aux quatre points A, » B, C, D; et les plans tangents communs en ces points » sont respectivement

CAD, CBD, ACB, ADB.

11. Les équations des plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) sont

$$(30)\quad \begin{cases} xy_0 + yx_0 + a(zt_0 + z_0 t) = 0, \\ xy_0 + yx_0 + a_1(zt_0 + z_0 t) = 0. \end{cases}$$

On constate alors que :

« Tous les points de l'arête AB, intersection des deux » premiers plans, ont même plan polaire par rapport » aux deux surfaces; ces plans passent par l'arête CD,

» intersection des deux autres plans. Tous les points de » l'arête CD ont même plan polaire, et ces plans passent » par l'arête AB.

» Tout plan passant par AB coupe les deux surfaces » suivant des coniques doublement tangentes; il en est » de même pour les plans passant par CD. »

(*La suite prochainement.*)

SUR LA DOUBLE GÉNÉRATION DES ÉPICYCLOÏDES PLANES;

Par M. FOURET,

Lieutenant du Génie.

Le fait de la double génération des épicycloïdes planes au moyen d'un cercle roulant sur un autre a été découvert par Euler pour le cas des épicycloïdes ordinaires; on en trouve une démonstration très-simple dans le *Traité de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel, 1re édit., t. Ier, p. 188. Je me propose de faire voir ici que la même propriété appartient aux épicycloïdes quelconques (allongées ou raccourcies). Dans une Note présentée à la Société Philomathique (*), j'ai déjà donné ce résultat comme conséquence d'autres propositions également nouvelles.

En voici une démonstration directe qui ne suppose de connu sur les épicycloïdes que la définition qu'on en donne ordinairement.

La démonstration s'appliquant également au cas de

(*) *Voir* dans l'*Institut* l'extrait du procès-verbal de la séance du 17 mai 1868.

l'hypocycloïde (*fig.* 1), et au cas de l'épicycloïde proprement dite (*fig.* 2), nous ne ferons qu'un seul raisonnement applicable aux deux figures.

Fig. 1. (Hypocycloïde.)

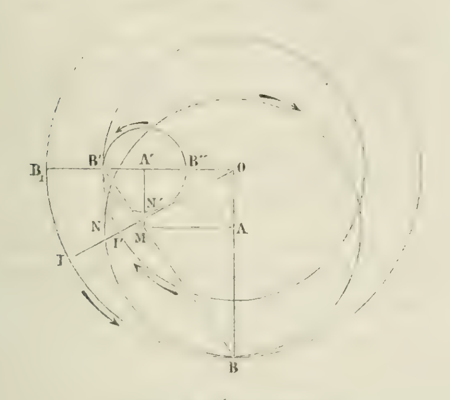
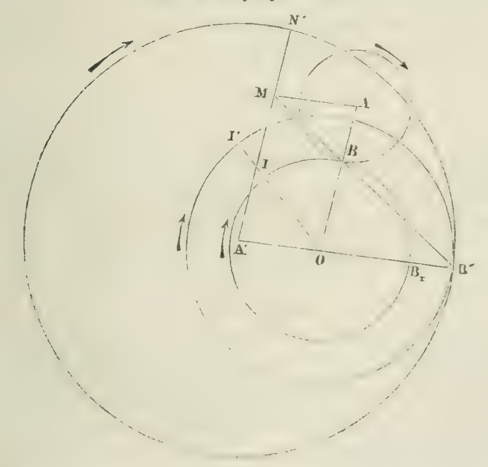


Fig. 2. (Épicycloïde.)



Soit M un point lié invariablement à une circonférence dont le centre est en A et engendrant une épicycloïde,

tandis que cette circonférence roule intérieurement ou extérieurement sur une circonférence fixe dont le centre est en O. Menons par le point O une parallèle à la droite AM dans sa position actuelle, et prenons les points B′ et A′ où cette parallèle rencontre, d'une part, la droite qui joint le point M au point B de contact des deux circonférences, de l'autre la parallèle à OB menée par le point M. Décrivons deux nouvelles circonférences tangentes en B′ et ayant pour centres, l'une le point O, l'autre le point A′. Si nous faisons rouler le cercle A′ sur le nouveau cercle O, le point M entraîné par le cercle mobile engendrera la même épicycloïde qu'il décrivait primitivement, pourvu que les points de contact des cercles mobiles avec les cercles fixes se déplacent dans le même sens que précédemment ou en sens contraires, suivant qu'il s'agit d'une épicycloïde (*fig.* 2) ou d'un hypocycloïde (*fig.* 1), p. 163.

Pour le démontrer, soient N le point de rencontre de AM avec la circonférence (A), et I le point de la circonférence fixe correspondante avec lequel le point N est venu en coïncidence. On a

$$BI = BN.$$

Soit N′ le point de rencontre de A′M avec la circonférence (A′); je dis que le point de la circonférence fixe correspondante avec lequel N′ est venu en coïncidence est le point I′ situé sur la droite OI, c'est-à-dire que

$$B'I' = B'N'.$$

Désignons, pour abréger, AM par a, A′M par a_1, les rayons des deux cercles générateurs primitifs par R et R′, et les rayons des deux nouveaux par R_1 et R'_1. Puisque BI = BN par hypothèse, on a

$$\widehat{IOB} \times R = \widehat{MAB} \times R',$$

ou bien

$$\frac{\widehat{IOB}}{\widehat{MAB}} = \frac{R'}{R},$$

d'où

$$\frac{\widehat{MAB} \mp \widehat{IOB}}{\widehat{MAB}} = \frac{R \mp R'}{R'} \text{ (*)}.$$

Cette dernière proportion à cause de $OA = A'M$ donne identiquement la suivante

$$\frac{\widehat{I'OB'}}{\widehat{MA'B'}} = \frac{A'M}{OB} = \frac{A'B'}{OB'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\widehat{I'OB'}}{\widehat{MA'B'}} = \frac{R'_1}{R_1},$$

d'où

$$\widehat{I'OB'} \times R = \widehat{MA'B'} \times R'_1,$$

ou bien

$$B'I' = B'N'.$$

On voit, d'après cela, que si nous faisons rouler les circonférences mobiles sur les circonférences fixes dans le sens que nous avons indiqué ci-dessus, les points N et N' viendront coïncider respectivement avec les points I et I', et le point M, qu'il soit entraîné par l'une ou l'autre des deux circonférences mobiles, se trouvera toujours à ce moment sur la droite OII'. Il nous reste à faire voir qu'il occupera dans les deux cas la même position sur cette droite, c'est-à-dire que

$$MN' \pm MN = II'.$$

(*) Toutes les fois que nous mettrons le double signe devant un terme, le signe supérieur se rapportera à la *fig.* 1 et l'inférieur à la *fig.* 2.

En effet, on voit facilement sur les *fig.* 1 et 2, p. 163, que

$$MN = \pm(R' - a),$$
$$MN' = \pm(a_1 - R'_1),$$

d'où

$$MN' \pm MN = \pm(a_1 - R'_1) + (R' - a),$$

ou à cause de

$$a = OA' = \pm(R_1 - R'_1),$$
$$a_1 = OA = R \mp R',$$
$$MN' \pm MN = \pm(R - R_1) = II'.$$

Ce qu'il s'agissait de démontrer.

Remarques. — 1° On peut facilement trouver l'expression de a_1, R_1 et R'_1 en fonction de a, R et R'. Nous venons de trouver

(1) $$a_1 = R \mp R'.$$

Les triangles semblables BAM', BOB' donnent la proportion

$$\frac{R_1}{a} = \frac{R}{R'},$$

d'où

(2) $$R_1 = a\frac{R}{R'}.$$

Les triangles semblables BAM, MA'B' donnent

$$\frac{R'_1}{a} = \frac{a_1}{R'},$$

d'où, à cause de (1),

(3) $$R'_1 = a\frac{R \mp R'}{R'}.$$

Les formules (2) et (3) donnent pour le cas particulier des épicycloïdes ordinaires les résultats que l'on connaît.

En y faisant $a = R'$, on obtient

$$R_1 = R,$$
$$R'_1 = R \mp R',$$

et, par suite, (1) donne

$$a_1 = R'_1.$$

2° Nous avons vu que lorsque le point M décrit l'épicycloïde, on peut le supposer entraîné par l'une ou l'autre des circonférences (A), (A') roulant simultanément sur la circonférence fixe correspondante; il est facile de trouver le rapport des vitesses angulaires des centres A et A'. En effet,

$$\frac{\widehat{IOB}}{\widehat{IOB_1}} = \frac{\text{arc IB}}{\text{arc IB}_1};$$

or

$$\frac{\text{arc IB}_1}{\text{arc I}'\text{B}'} = \frac{R}{R_1},$$

donc

$$\frac{\widehat{IOB}}{\widehat{IOB_1}} = \frac{\text{arc IB}}{\text{arc I}'\text{B}'} \cdot \frac{R_1}{R} = \frac{R'}{R'_1} \cdot \frac{R_1}{R} = \frac{a}{R'_1} = \frac{R'}{a_1}.$$

Tel est le rapport des vitesses angulaires des centres des deux circonférences (A) et (A').

Dans le cas des épicycloïdes ordinaires, ce rapport est égal au rapport des rayons des deux circonférences mobiles, puisque $a = R'$ et $a_1 = R'_1$.

3° Nous avons laissé de côté le cas où la circonférence mobile renferme à son intérieur la circonférence fixe sur laquelle elle roule; mais la démonstration que nous avons faite appliquée à la *fig.* 2, nous montre que réciproquement si (A') était le cercle roulant primitivement sur le cercle (O) renfermé dans son intérieur, l'épicycloïde

engendrée par le point M lié à ce cercle pourrait être engendrée au moyen du cercle extérieur (A) roulant sur un cercle fixe concentrique au premier, les rayons des nouveaux cercles se déduisant des formules (1), (2), (3), et les centres des circonférences mobiles tournant dans le même sens.

Nous pouvons maintenant conclure de ce qui précède que :

Toute épicycloïde (ordinaire, allongée ou raccourcie) peut être engendrée par le roulement de deux cercles de rayons différents sur deux autres cercles également différents, mais concentriques. Les rayons des nouveaux cercles se déduisent de ceux des anciens au moyen des formules (1), (2), (3); *et les points de contact des cercles mobiles avec les cercles fixes qui leur correspondent se déplacent dans le même sens ou en sens contraires, suivant que l'épicycloïde engendrée est extérieure ou intérieure.*

Remarque. — La première partie de la Question 437 est une conséquence immédiate du théorème que nous venons de démontrer. *Voir* une solution de cette Question. *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VII, p. 37.

SUR LES COMBINAISONS COMPLÈTES;

PAR M. A.-G. MELON,

Professeur.

Nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n.

Appelons $a, b, c, d, \ldots l$, les m lettres données. Prenons pour auxiliaires un certain nombre de lettres grec-

ques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, auxquelles nous attribuerons successivement des valeurs convenables et arbitraires. On combinera n à n, à la manière ordinaire, toutes les lettres données et auxiliaires, et on ne considérera que les groupes où il entrera au moins une lettre française. On voit par là qu'il suffira que le nombre des lettres grecques considérées soit égal à $(n-1)$.

En combinant les $(m+n-1)$ lettres n à n, à la manière ordinaire, on obtient les expressions :

$$\Sigma m_1 \alpha_{n-1}, \quad \Sigma m_2 \alpha_{n-2}, \quad \Sigma m_3 \alpha_{n-3}, \ldots, \quad \Sigma m_{n-1} \alpha_1, \quad \Sigma m_n,$$

Dans chaque terme contenu dans $\Sigma m_1 \alpha_{n-1}$, il entre
1 lettre française et $(n-1)$ grecques,
Dans chaque terme contenu dans $\Sigma m_2 \alpha_{n-2}$, il entre
2 lettres françaises et $(n-2)$ grecques,
Dans chaque terme contenu dans $\Sigma m_3 \alpha_{n-3}$, il entre
3 lettres françaises et $(n-3)$ grecques,

. . . .

Dans chaque terme contenu dans $\Sigma m_{n-1} \alpha_1$, il entre
$(n-1)$ lettres françaises et 1 grecque,

Σm_n contient seulement des lettres françaises, et exprime l'ensemble des combinaisons ordinaires n à n des m lettres données.

Par des valeurs convenables données aux lettres grecques, nous allons successivement obtenir les combinaisons complètes cherchées où il n'entre d'abord qu'une lettre, puis deux lettres, puis trois, ...

Dans $\Sigma m_1 \alpha_{n-1}$ rendons toutes les lettres grecques égales à la lettre française; nous obtenons Σa^n qui renferme m termes.

Dans $\Sigma m_2 \alpha_{n-2}$ rendons égales à la première lettre française successivement $(n-2)$, $(n-3)$, $(n-4)$, ..., 0 des lettres grecques, tandis que nous égalerons à la deuxième

lettre française restante chacune des lettres grecques restantes. Nous obtenons

$$\Sigma a^{n-1} b, \quad \Sigma a^{n-2} b^2, \quad \Sigma a^{n-3} b^3, \ldots, \quad \Sigma a b^{n-1}.$$

Le nombre des termes pour chaque groupe de deux lettres françaises est égal au nombre des combinaisons ordinaires $(n - 2)$ à $(n - 2)$ des $(n - 1)$ lettres grecques. Ce nombre est donc $(n - 1)$. Or le nombre des groupes où deux lettres françaises se joignent aux groupes de $(n - 2)$ lettres grecques, égale le nombre des combinaisons ordinaires de m lettres 2 à 2, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1.2}$. Le nombre total des combinaisons complètes où il n'entre que deux lettres sera donc

$$\frac{m(m-1)}{1.2}(n-1).$$

On obtient ainsi toutes les combinaisons complètes renfermant deux lettres; car de $(a^{n-1} b)$ à (ab^{n-1}), il y a $(n - 1)$ groupes et pas d'autres; et comme ces groupes se répètent en même nombre pour chaque combinaison de m lettres 2 à 2, nous aurons bien pour le nombre total $\frac{m(m-1)}{1.2}(n-1)$, et n'en aurons pas d'autres.

Nous obtiendrons d'une manière analogue toutes les combinaisons complètes où entrent trois lettres. Si dans $\Sigma m_3 \alpha_{n-3}$, nous prenons un terme $(abc.\alpha_{n-3})$, on voit, comme plus haut, que le nombre des combinaisons complètes que fournit ce terme, égale le nombre des combinaisons ordinaires des $(n - 1)$ lettres grecques $(n - 3)$ à $(n - 3)$. Ce nombre est $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$. Comme il se trouve $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ groupes de trois lettres françaises

(tels que *abc*), on aura, pour le nombre des combinaisons complètes où entrent trois lettres, l'expression

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.$$

Pareillement, le nombre des combinaisons complètes qui contiennent quatre lettres sera égal à

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}.$$

Pour avoir le nombre total des combinaisons complètes de m lettres n à n, on à donc a faire la somme

$$\begin{aligned} m &+ \frac{m(m-1)}{1.2}(n-1) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}(n-1) \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}. \end{aligned}$$

Considérons les deux développements

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (x+1)^m &= x^m + mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2} \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{x}+1\right)^{n-1} &= \frac{1}{x^{n-1}} + (n-1)\frac{1}{x^{n-2}} \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{1}{x^{n-3}} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Multiplions membre à membre, nous aurons

$$(x+1)^m\left(\frac{1}{x}+1\right)^{n-1}$$

$=$ un ensemble de termes de divers degrés $+$ une somme de termes du degré $(m-n)$ en x.

Cette dernière contient précisément les coefficients que nous voulons sommer. On s'en assure dans les développements (1) et (2), en multipliant entre eux les termes qui se correspondent verticalement. Dans la valeur du produit $(x+1)^m\left(\frac{1}{x}+1\right)^{n-1}$, nous allons chercher le terme de degré $(m-n)$. Son coefficient exprimera la somme cherchée. On a

$$(x+1)^m\left(\frac{1}{x}+1\right)^{n-1}=\frac{(x+1)^{m+n-1}}{x^{n-1}}.$$

Développons $\frac{(x+1)^{m+n-1}}{x^{n-1}}$; nous aurons pour le terme général

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+n-1-p)}{1.2.3\ldots(p+1)}\,\frac{x^{m+n-1-(p+1)}}{x^{n-1}},$$

ou

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+n-1-p)}{1.2\ldots(p+1)}\,x^{m-p-1}.$$

Disposons de p de façon que l'exposant de x soit égal à $(m-n)$. Pour cela posons

$$m-p-1=m-n;$$

on tire

$$p=n-1;$$

le coefficient devient

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots m}{1.2.3\ldots n}.$$

Le nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n est donc égal à celui des combinaisons ordinaires de $(m+n-1)$ lettres n à n.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 903

(voir 2e série, t. VIII, p. 45);

PAR M. HENRI LEZ
ET M. DUGRAIS,
Élève à l'école de Sainte-Barbe.

Si par le milieu de chaque arête d'un tétraèdre on fait passer un plan perpendiculaire à l'arête opposée, les six plans ainsi obtenus passent par un même point.

(M.)

Soit le tétraèdre ABCD (*). Soient H, K, L les milieux des arêtes AB, AC, AD; les plans menés par les milieux de ces arêtes perpendiculairement aux arêtes opposées CD, BD, BC se coupent suivant une même droite α, perpendiculaire à la face BCD : en effet, ces plans ont pour traces, sur le triangle HKL, les hauteurs de ce triangle, qui concourent en un même point.

Pour la même raison, les plans menés par les milieux des arêtes BA, BC, BD se coupent suivant une même droite β, perpendiculaire à la face ACD. Cette droite β rencontre la perpendiculaire α qui se trouve dans le même plan mené par le milieu de AB.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Enfin l'intersection des plans qui passent par le milieu des arètes CA, CB, CD est une perpendiculaire γ à la face ABD, et cette droite appartient aussi aux plans qui contiennent α et β.

Ces trois perpendiculaires, qui ne sont pas dans le même plan, concourent donc au même point commun aux six plans en question.

Note. — M. Coquet, maître répétiteur au lycée de Bordeaux, et M. Figa Bartolomeo ont résolu la même question.

Question 908

(voir 2e série, t. VIII, p. 47);

Par M. FIGA BARTOLOMEO,
de Turin.

Soit un quadrilatère inscriptible ABCD. *Si je considère un triangle formé par trois sommets de ce quadrilatère, les pieds des perpendiculaires abaissées du quatrième sommet sur les côtés du triangle considéré sont sur une ligne droite xy.*

Cela posé, démontrer :

1° *Que les quatre droites xy, que l'on peut construire en groupant trois à trois les quatre sommets* A, B, C, D, *se coupent en un même point* O;

2° *Que ce point est un point commun aux quatre cercles des neuf points des quatre triangles, et que, par suite, si un sommet se meut sur la circonférence circonscrite au triangle formé par les trois autres, le lieu du point* C *sera le cercle des neuf points de ce triangle.*

(E. Lemoine.)

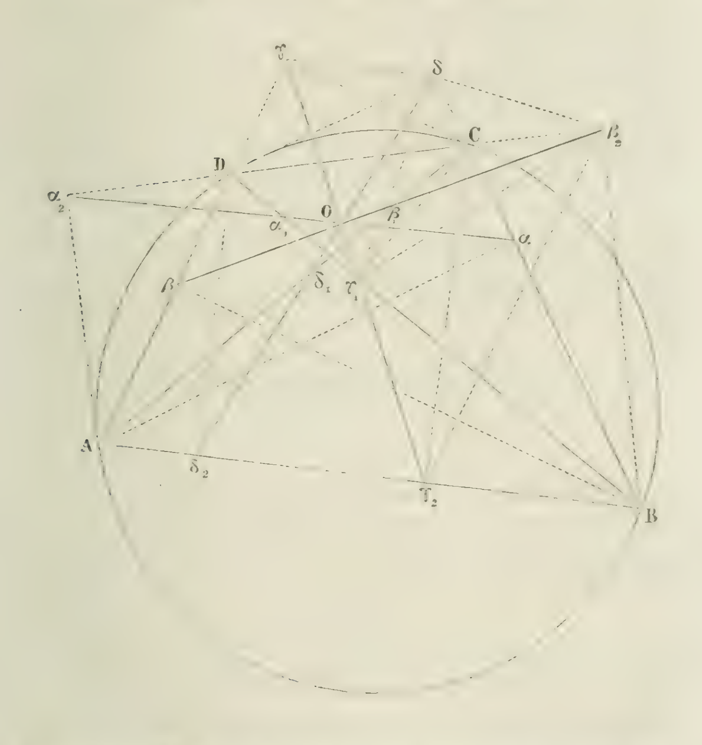
Soient A, B, C, D quatre points d'une circonférence, que l'on cherche les pieds des hauteurs des quatre trian-

gles auxquels ils donnent lieu, on obtiendra ainsi douze points

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2.$$

Il est évident que les points α, α_1, α_2, β, β_1, β_2.... sont sur une droite. Les deux droites $\gamma\delta$, AB sont parallèles, parce que le quadrilatère DC$\gamma\delta$ étant inscriptible, on a

$$D\gamma\delta = 180^\circ - DC\delta = 180^\circ - DAB.$$



Les angles $\delta\delta_2$B, $\gamma\gamma_2$A sont égaux, puisque les deux quadrilatères AD$\delta_2\delta_1$, BC$\gamma_1\gamma_2$ sont inscriptibles, et l'on a

(1) $$\delta_1\delta_2 D = \delta_1 AD = \gamma_1 BC = \gamma_1\gamma_2 C.$$

Le trapèze $\gamma\delta\gamma_2\delta_2$ est donc isocèle; le point O d'intersection des droites $\gamma\gamma_2$, $\delta\delta_2$ sera un point de l'axe radical des deux cercles qui ont pour diamètres AC, DB. Il sera facile de voir par analogie que le trapèze $\beta\gamma\beta_2\gamma_2$ est isocèle : le point de concours des deux diagonales $\beta\beta_2$, $\gamma\gamma_2$ est sur l'axe radical des deux mêmes cercles de diamètres AC, DB. On voit donc que la droite $\beta\beta_2$ passe par O. On doit dire de même de la droite $\alpha\alpha_2$.

On voit par l'égalité (1) que l'angle $D\delta_2 O$, et par conséquent l'angle des deux droites $\gamma\gamma_2$, $\delta\delta_2$ ne dépend que de l'angle DBC. Il en résulte que si le point A se meut sur le cercle ABCD, les points B, C, D restant fixes, l'angle des deux droites $\gamma\gamma_2$, $\delta\delta_2$ ne varie pas, et son sommet O décrit la circonférence $\gamma_1\delta O$. On voit de même que, dans ce mouvement du point A, le point O doit décrire la circonférence $\beta_2\gamma_1 O$. Le point O se trouve donc sur la circonférence $\beta_2\gamma_1\delta$.

On peut démontrer aussi la même chose comme il suit :

Le quadrilatère $BC\beta_2\gamma_2$ étant inscriptible, on a

$$C\beta_2\gamma_1 = CBD,$$

et à cause de l'égalité (1)

$$C\beta_2\gamma_1 = \gamma_1\gamma_2 C.$$

On voit de même que

$$\delta\beta_2 D = D\delta_2\delta_1;$$

et en ajoutant ces deux dernières égalités, on aura

$$\delta\beta_2\gamma_1 = \gamma_1\gamma_2 C + D\delta_2\delta_1 = \delta_2 O\gamma_2;$$

donc, etc.

On déduit de ce qui précède :

1° Que les douze points α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1,...

peuvent être rangés en quatre groupes de trois chacun, de manière que les points de chaque groupe soient sur une droite; les quatre droites ainsi obtenues ont la même longueur et passent par un même point O;

2° Que ces mêmes points peuvent être rangés en quatre groupes de trois, de manière que les quatre cercles qui passent respectivement par les trois points de chaque groupe passent par le même point O;

3° Que ces mêmes points peuvent être arrangés en trois groupes de quatre points (α, β, γ, δ; α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2), de manière que les quatre points d'un groupe se trouvent sur une même circonférence; les trois cercles ainsi obtenus sont concentriques en O, et chaque groupe forme un quadrilatère semblable au primitif ABCD;

4° Que le point O est le point de concours des trois axes radicaux des trois couples de cercles qui ont pour diamètres les côtés opposés et les diagonales du quadrilatère ABCD;

5° Que trois droites comme $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$; $\alpha\gamma$, $\alpha_1\gamma_1$, $\alpha_2\gamma_2$,..., sont parallèles.

Note du Rédacteur. — M. Jansen, élève du lycée de Douai, nous a envoyé une solution algébrique de la même question, et M. Morel une solution géométrique aussi simple que la précédente.

Voici, en résumé, la solution géométrique de M. Kiepert, étudiant en mathématiques, à Berlin :

Dans le quadrilatère inscriptible ABCD, abaissons des points C et D les perpendiculaires $C\gamma_2$, $D\delta_2$ sur AB qui rencontrent la circonférence aux points E et F. Soient d et c les points de rencontre des hauteurs dans les triangles ACB et ABD.

On sait que

$$\gamma_2 E = \gamma_2 d,$$
$$\delta_2 F = \delta_2 c;$$

il résulte de là que $CDcd$ est un parallélogramme. Les diagonales cC, dD se rencontrent en K, et l'on a

$$dK = KD,$$
$$cK = KC.$$

Mais toutes les droites qui joignent d et un point quelconque de la circonférence ont leurs milieux sur la circonférence des neuf points relative au triangle ABC.

De même le cercle des neuf points du triangle ABD passe par le milieu de Cc, c'est-à-dire par le point K.

Comme le triangle $\gamma_2 K \delta_2$ est isocèle, la droite qui passe par les pieds des perpendiculaires menées du point D aux côtés du triangle ABC est la droite $\delta_2 K$, et la droite qui passe par les pieds des perpendiculaires menées du point C aux côtés du triangle ABD est la droite $\gamma_2 K$.

On voit par là que le point K se confond avec le point O de la figure précédente.

Question 911

(voir 2e série, t. VIII, p. 47);

PAR M. V. HIOUX,

Surveillant général au lycée Saint-Louis (École préparatoire).

ÉNONCÉ. — *Si deux coniques de forme invariable se déplacent de manière que leurs quatre axes restent respectivement tangents à quatre cercles, et de manière que les points d'intersection des deux coniques soient sur un cercle, quel est le lieu des centres de ce cercle?*

(DARBOUX.)

I. Désignons par R, R′, R″, R‴ les rayons des quatre cercles, par $C(\alpha, \beta)$, $C'(\alpha', \beta')$, $C''(\alpha'', \beta'')$, $C'''(\alpha''', \beta''')$ leurs centres, et considérons deux axes rectangulaires quelconques dans le plan des quatre cercles.

Soient maintenant

$$B = y - mx - p = 0, \quad A = my + x - mq = 0$$

les équations des axes de la conique E (axes a, b), avec les conditions

$$p = \beta - m\alpha + R\sqrt{1 + m^2}, \quad q = \frac{m\beta' + \alpha' + R'\sqrt{1 + m^2}}{m},$$

qui expriment que ces axes sont tangents aux cercles R et R′.

Si $M(x, y)$ est un point de la conique E; si MP et MQ sont les distances de ce point aux axes a et b, on a

$$a^2\overline{MQ}^2 + b^2\overline{MP}^2 = a^2b^2.$$

Ainsi, l'équation de la conique E est

$$\text{(E)} \qquad a^2B^2 + b^2A^2 = a^2b^2(1 + m^2).$$

Puisque les quatre points communs aux deux coniques doivent être sur une même circonférence, les axes de la seconde sont respectivement perpendiculaires à ceux de la première, et leurs équations sont par suite

$$B' = my + x - mp' = 0, \quad A' = y - mx - q' = 0,$$

avec les conditions

$$p' = \frac{m\beta'' + \alpha'' + R''\sqrt{1 + m^2}}{m}, \quad q' = \beta''' - m\alpha''' + R'''\sqrt{1 + m^2}.$$

Ainsi l'équation de la conique E′ (axes a', b') est

$$\text{(E')} \qquad a'^2B'^2 + b'^2A'^2 = a'^2b'^2(1 + m^2).$$

Multiplions cette équation par λ, ajoutons-la à l'équa-

tion E, et nous obtenons

$$(\lambda) \qquad (a^2 B^2 + \lambda a'^2 B'^2 + b^2 A^2 + \lambda b'^2 A'^2 + H = 0;$$

cette équation représente un cercle si l'on fait

$$\lambda = \frac{a^2 - b^2}{a'^2 - b'^2} = \frac{c^2}{c'^2}.$$

En effet, le coefficient du terme en xy s'annule; la différence des coefficients des termes en x^2 et y^2 est

$$m^2[\lambda(a'^2 - b'^2) - (a^2 - b^2)] + [(a^2 - b^2) - \lambda(a'^2 - b'^2)];$$

cette différence s'annule, quel que soit m^2, pour la valeur précédente de λ.

Les équations qui déterminent le centre M se mettent facilement sous la forme

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (a^2 a'^2 - b^2 b'^2)(1 + m^2) y \\ \quad - c'^2 (a^2 p + m^2 b^2 q) - c^2 (m^2 a'^2 p' + b'^2 q') = 0, \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (a^2 a'^2 - b^2 b'^2)(1 + m^2) x \\ \quad + c'^2 (m a^2 p - m b^2 q) - c^2 (m a'^2 p' - m b'^2 q') = 0. \end{array} \right.$$

La première, multipliée par m et ajoutée à la seconde, donne, après la suppression du facteur $(1 + m^2)$ commun à tous les termes

$$(3) \quad (a^2 a'^2 - b^2 b'^2)(my + x) - c'^2 b^2 mq - c^2 a'^2 mp' = 0.$$

On obtient de même, en multipliant la seconde par m et la retranchant ensuite de la première,

$$(4) \quad (a^2 a'^2 - b^2 b'^2)(y - mx) - c'^2 a^2 p - c^2 b'^2 q' = 0.$$

Remplaçons maintenant p, q, p', q' par leurs valeurs; désignons par

$$F \left(x_1 = \frac{c'^2 b^2 \alpha' + c^2 a'^2 \alpha''}{a^2 a'^2 - b^2 b'^2}, \quad y_1 = \frac{c'^2 b^2 \beta' + c^2 a'^2 \beta''}{a^2 a'^2 - b^2 b'^2} \right),$$

$$F' \left(x'_1 = \frac{c'^2 a^2 \alpha + c^2 b'^2 \alpha'''}{a^2 a'^2 - b^2 b'^2}, \quad y'_1 = \frac{c'^2 a^2 \beta + c^2 b'^2 \beta'''}{a^2 a'^2 - b^2 b'^2} \right)$$

deux points fixes du plan, et nous pourrons mettre les équations (3) et (4) sous la forme

$$(6) \quad m(y-y_1)+(x-x_1)=\sqrt{1+m^2}\,\frac{c'^2b^2R'+c^2a'^2R''}{a^2a'^2-b^2b'^2},$$

$$(7) \quad (y-y'_1)-m(x-x'_1)=\sqrt{1+m^2}\,\frac{c'^2a^2R+c^2b'^2R'''}{a^2a'^2-b^2b'^2}.$$

Le premier membre de l'équation (6), divisé par $\sqrt{1+m^2}$, exprime la distance du point $M(x, y)$ à la droite

$$(D) \qquad m(y-y_1)+x-x_1=0;$$

cette distance est constante et égale à

$$\frac{c'^2b^2R'+c^2a'^2R''}{a^2a'^2-b^2b'^2}=R_1.$$

De même le premier membre de l'équation (7), divisé par $\sqrt{1+m^2}$, exprime la distance du même point $M(x, y)$ à la droite

$$(D') \qquad y-y'_1-m(x-x'_1)=0;$$

cette distance est aussi constante et égale à

$$\frac{c'^2a^2R+c^2b'^2R'''}{a^2a'^2-b^2b'^2}=R'_1.$$

La droite D passe par le point F et la droite D′ par le point F′; elles sont d'ailleurs perpendiculaires l'une à l'autre.

Donc, si des points F et F′ comme centres, on décrit deux cercles de rayons R_1, R'_1, le point M est le sommet d'un angle droit circonscrit à ces deux cercles.

Ainsi, le lieu du point M est un limaçon de Pascal. Le cercle directeur est le cercle qui a pour diamètre FF′; le paramètre l est égal à $\sqrt{R_1^2+R_1'^2}$.

Pour obtenir le pôle, divisons membre à membre les équations (6) et (7), nous obtenons

$$(8) \qquad \frac{m(y - y_1) + (x - x_1)}{(y - y'_1) - m(x - x_1)} = \frac{R_1}{R'_1}.$$

Soit B le point de concours des droites D et D'; l'équation (8) représente la droite BM. Cette équation (8) peut s'écrire

$$m[R'_1(y - y_1) + R_1(x - x'_1)] - [R_1(y - y'_1) - R'_1(x - x_1)] = 0.$$

Ainsi la droite BM passe par un point fixe A, commun aux deux droites

$$R'_1(y - y_1) + R_1(x - x'_1) = 0,$$
$$R_1(y - y'_1) - R'_1(x - x_1) = 0.$$

Menons par les points F et F' des parallèles aux axes coordonnés, nous formons un rectangle $FF_1F'F'_1$ inscrit dans le cercle FF'. Les deux droites en question passent, la première au point $F_1(x'_1, y_1)$, la seconde au point $F'_1(x_1, y'_1)$. De plus, ces deux droites se coupent à angle droit, et, par suite, le point A appartient à la circonférence FF'. Ce point A est le pôle du limaçon lieu du point M.

II. *Discussion.* — Pour rendre la discussion plus commode, nous ferons la remarque suivante.

Considérons deux cercles O et O' de rayons R et R', et un rectangle $MM_1M'M'_1$ dont les côtés sont deux à deux tangents à ces cercles. Soit B le centre du rectangle; ce point appartient à la circonférence de diamètre OO'. Les diagonales MM' et $M_1M'_1$ du rectangle passent par deux points fixes A et A' de cette circonférence, puisque dans toutes les positions du rectangle l'angle OBM' est constant, ainsi que l'angle OBM'_1. Les sommets M et M' dé-

crivent un limaçon L de pôle A, et les sommets M_1 et M'_1 décrivent un limaçon L′ de pôle A′. Ces deux limaçons ont même paramètre $l = \sqrt{R^2 + R'^2}$. Comme les droites BA, BA′ sont conjuguées harmoniques relativement aux droites BO et BO′, nous les appellerons *limaçons conjugués.*

On passe de l'un à l'autre par le changement de R en — R ou de R′ en — R′.

Cela posé, admettons que les coniques E et E′ soient deux ellipses ayant leurs axes de même nom respectivement perpendiculaires, et supposons $a > b$, $a' > b'$.

Dans ce cas on ne peut pas avoir

$$a^2a'^2 - b^2b'^2 = 0;$$

par conséquent, le problème a toujours une solution.

Si dans l'équation (8) nous changeons R_1 en $-R_1$, nous aurons l'équation d'une droite BA′, conjuguée de BA par rapport à BF et BF′. Les droites BA, BA′ sont les diagonales d'un rectangle $MM_1M'M'_1$ dont deux côtés sont tangents au cercle F et deux autres au cercle F′. Les points M et M′ appartiennent à un limaçon L_1 de pôle A et les sommets M_1, M'_1 à un limaçon L'_1 de pôle A′, conjugué du précédent.

Le lieu demandé est l'un ou l'autre de ces deux limaçons. Remarquons maintenant que le centre O de la conique E décrit un limaçon L, ou son conjugué L′, relativement aux deux cercles R et R′; de même le centre O′ de la conique E′ décrit un limaçon L″ ou son conjugué L‴ relativement aux cercles R″ et R‴.

Soient L et L″ les lieux des points O et O′ lorsque l'on donne aux quatre rayons le même signe, par exemple le signe +. Dans ce cas, le point M décrira le limaçon L_1 de pôle A.

Changeons R′ en — R′ et R″ en — R″, les centres O

et O' décrivent les limaçons L' et L''' conjugués respectivement de L et L''. Mais on a changé par le fait R_1 en $-R_1$, donc le point M, venu en M_1, décrit le limaçon L'_1, de pôle A', conjugué de L_1.

On trouve pour les coordonnées du point A

$$Y_1 = \frac{R'^2_1 y_1 + R^2_1 y'_1 + R_1 R'_1 (x'_1 - x_1)}{R^2_1 + R'^2_1},$$

$$X_1 = \frac{R'^2_1 x_1 + R^2_1 x'_1 - R_1 R'_1 (y'_1 - y_1)}{R^2_1 + R'^2_1}.$$

Les coordonnées X'_1, Y'_1 du point A' s'en déduisent par le changement de R_1 en $-R_1$; de sorte que l'on a

$$\frac{Y_1 - Y'_1}{X_1 - X'_1} = -\frac{x_1 - x'_1}{y_1 - y'_1},$$

ce qui prouve que la corde AA' est perpendiculaire au diamètre FF'. Ainsi, les limaçons conjugués L_1 et L'_1 sont symétriques par rapport au diamètre FF'.

Supposons maintenant que les axes de même nom des deux ellipses soient respectivement parallèles, l'expression $a^2 a'^2 - b^2 b'^2$ deviendra

$$a^2 b'^2 - b^2 a'^2,$$

par le changement de a'^2 en b'^2, et réciproquement.

De sorte que, si les deux ellipses ne sont pas semblables, le problème a encore une solution. Mais si l'on a

$$a^2 a'^2 - b^2 b'^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

la circonférence de centre M devient une droite; le centre M est rejeté à l'infini, et il n'y a plus de lieu.

Si l'on fait

$$R = R' = R'' = R''' = 0,$$

on a aussi

$$R_1 = R'_1 = 0,$$

et, par suite,

$$l = \sqrt{R_1^2 + R_1'^2} = 0.$$

Mais les valeurs de x_1, y_1, x'_1, y'_1 ne sont pas altérées, puisqu'elles ne dépendent que des coordonnées des points C, C', C'', C'''. Le rectangle $MM_1M'M'_1$, de dimensions $2R_1$ et $2R'_1$, se réduit à son centre B. Dans ce cas, le lieu est la circonférence qui a pour diamètre FF'.

Pour $R_1 = 0$, ce qui exige $R' = R'' = 0$, on a

$$Y_1 = y_1, \quad X_1 = x_1;$$

le point A et le point A' se confondent avec le point F, le lieu devient un limaçon de pôle F et de paramètre $l = R'_1$.

De même pour $R'_1 = 0$, on a un limaçon de pôle F' et de paramètre $l = R_1$.

Remplaçons l'ellipse E' par une hyperbole; il suffit de changer b'^2 en $-b'^2$. Les points F et F' se déplacent, mais on a constamment

$$a^2a'^2 - b^2b'^2 > 0;$$

ainsi le problème a toujours une solution.

Enfin, on pourrait considérer deux hyperboles, et l'on verrait comme précédemment que si l'on n'a pas

$$a^2a'^2 - b^2b'^2 = 0,$$

le lieu du point M est un limaçon lorsque l'on n'a pas à la fois $R_1 = 0$, $R'_1 = 0$; et dans cette double hypothèse le lieu est la circonférence de diamètre FF'.

III. *Cas particulier.* — Il reste à examiner le cas où les coniques sont deux paraboles; les quatre axes se ré-

duisent à deux, et, par conséquent, au lieu de quatre cercles nous en prendrons deux, R′ et R″. Dans le numéro de janvier 1869, p. 32, on a envisagé le cas de deux paraboles tournant autour de leurs sommets supposés fixes. Si l'on considère deux points fixes comme deux cercles de rayons nuls, le problème que nous nous posons en ce moment est une généralisation de celui dont nous parlons.

Soient $S'(x', y')$, $S''(x'', y'')$ les sommets des deux paraboles en question, de paramètres p' et p''. Leurs quatre points d'intersection seront sur une même circonférence pourvu que leurs axes se coupent à angle droit. D'après cela, les équations des deux paraboles peuvent s'écrire

$$(p')\quad \left\{\begin{aligned}&[y - mx - (y' - mx')]^2\\ &\quad = 2p'\sqrt{1+m^2}[my + x - (my' + x')],\end{aligned}\right.$$

$$(p'')\quad \left\{\begin{aligned}&[my + x - (my'' + x'')]^2\\ &\quad = 2p''\sqrt{1+m^2}[y - mx - (y'' - mx'')].\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations, développées et ajoutées, donnent l'équation d'un cercle, lequel passe par les quatre points communs aux deux paraboles.

Le centre M de ce cercle est défini par les deux équations

$$\begin{aligned}&(1+m^2)y - (y' - mx') - mp'\sqrt{1+m^2}\\ &\qquad - m(my'' + x'') - p''\sqrt{1+m^2} = 0,\\ &(1+m^2)x + m(y' - mx') - p'\sqrt{1+m^2}\\ &\qquad - (my'' + x'') + mp''\sqrt{1+m^2} = 0,\end{aligned}$$

dont on déduit facilement les deux suivantes :

$$\begin{aligned}my + x - (my'' + x'') - p'\sqrt{1+m^2} = 0,\\ y - mx - (y' - mx') - p''\sqrt{1+m^2} = 0.\end{aligned}$$

Mais l'axe de (p') est tangent au cercle R′ et l'axe de (p'')

au cercle R″; donc on a

$$y' - mx' = \beta' - m\alpha' - R'\sqrt{1+m^2},$$
$$my'' + x'' = m\beta'' + \alpha'' - R''\sqrt{1+m^2}.$$

Par suite, les équations précédentes deviennent

$$m(y - \beta'') + (x - \alpha'') = \sqrt{1+m^2}\,(p' - R''),$$
$$y - \beta' - m(x - \alpha') = \sqrt{1+m^2}\,(p'' - R').$$

Ces équations sont analogues aux équations (6) et (7) (§ I). On a maintenant

(D) $$m(y - \beta'') + x - \alpha'' = 0,$$
(D′) $$y - \beta' - m(x - \alpha') = 0.$$

Les points fixes F et F′ sont en C″ et C′.

Le lieu est un limaçon de Pascal dont le cercle directeur a pour diamètre C′C″, dont le paramètre est

$$l = \sqrt{(p' - R'')^2 + (p'' - R')^2},$$

et dont le pôle A est le second point d'intersection avec le cercle C′C″ de la droite BM, représentée par l'équation

$$\frac{m(y - \beta'') + x - \alpha''}{y - \beta' - m(x - \alpha')} = \frac{p' - R''}{p'' - R'}.$$

Le lieu devient le cercle C′C″ si l'on a simultanément

$$p' - R'' = 0, \quad p'' - R' = 0.$$

Suivant que le point de rencontre des axes des paraboles (p') et (p'') appartient à un limaçon L′ ou à son conjugué L″, le point M décrit le limaçon de pôle A ou son conjugué de pôle A′.

Enfin, supposons $R' = 0$, $R'' = 0$, et nous aurons ce théorème :

Lorsque deux paraboles données p et p′ se déplacent

dans leur plan de manière que leurs axes passent par deux points fixes O *et* O′, *et se coupent à angle droit, le centre de la circonférence qui passe par leurs quatre points communs décrit un limaçon de Pascal dont le pôle* A *appartient à la circonférence de diamètre* OO′, *et qui a pour paramètre* $l = \sqrt{p^2 + p'^2}$.

BIBLIOGRAPHIE.

Sur l'étymologie du mot Algorithme ;

PAR UN BIBLIOPHILE.

En 1857, le prince B. Boncompagni, publia à Rome, sous ce titre : *Trattati d'Arithmetica*, un recueil d'anciens traités d'arithmétique. Le premier est tiré d'un manuscrit sur parchemin, marqué *Ii*. 6.5, et conservé dans la Bibliothèque de l'Université de Cambridge ; il est intitulé : *Algoritmi de numero Indorum*. Il contient les règles de la numération écrite suivant la doctrine indienne, celle de l'addition et de la soustraction, de la duplication, de la multiplication et de la division, avec la preuve dite *preuve par* 9, le tout sur des nombres entiers; l'auteur se propose ensuite de traiter *de multiplicatione fractionum et earum divisione et de extractione radicum*, et apprend à écrire, multiplier et diviser les fractions sexagésimales ; mais il s'interrompt et s'arrête au moment de passer aux fractions quelconques. Avant ou après l'exposition des principes se trouvent plusieurs fois les paroles *dixit Algorithmi*, *inquit Algorismi ;* par là il est clair que Algorithmi ou Algorismi est l'auteur d'un livre dont celui-ci est la traduction ou plutôt un extrait ; on ne peut même douter que ce ne soit le

mathématicien Mohammed-ben-Mousa, qui vivait au commencement du IXe siècle et est appelé *Al-Kharizmi*, de *Kharizm* ou *Khovarezm*, son pays natal. Comme preuve de cette identité, citons la phrase qu'on lit dans ce Traité (p. 2, lig. 3-6) : « Et jam patefeci in libro al- » gebre et almucabalah, id est restaurationis et opposi- » tionis, quod universus numerus sit compositus, et » quod universus numerus componatur super unum ». Cette allusion se rapporte parfaitement à l'*Abrégé du mode de calculer par algèbre et almucabala*, écrit par Mohammed-ben-Mousa Alkharzmi, où, suivant la traduction anglaise de Frédéric Rosen, il est dit : « I also » observed that every number is composed of units and » that any number may be divided into units ». Dans ce traité *Algoritmi de numero Indorum* (p. 10, lig. 20-22), on fait allusion au même abrégé de la manière suivante : « Etiam patefeci in libro quod necesse est omni numero » qui multiplicatur in altero quolibet, ut duplicetur » unus ex illis secundum unitates alterius » ; et à cela répond, en effet, un passage ainsi traduit par Rosen : « Whenever one number is to be multiplied by another, » the one must be repeated as many times as the others » contains units ». Évidemment au passage indiqué le mot *duplicetur* est mis pour *multiplicetur*.

On démontre donc par l'opuscule publié par le prince Boncompagni que Mohammed composa outre son Traité d'Agèbre un livre sur la méthode indienne de numération; donc, de lui a pu parfaitement dériver le nom d'*Algorismus* ou *Algoritmus* donné dans le moyen âge à l'arithmétique nouvelle, comme le conjecture Reinaud. Il est à croire que le nom d'*Algus* employé dans quelques manuscrits et ouvrages comme le nom de celui qui enseigna cette arithmétique a été par abréviation ou par erreur substitué à celui d'*Algorismus* ; ainsi Tartaglia affirme, et

M. Chasles répète, que Jean de Sacrobosco appelle *Algo* le philosophe du nom duquel l'arithmétique fut appelée *Algorisme*, et telle est la leçon de quelque édition du Traité écrit par Sacrobosco; mais dans celle que fit Clichtovée avec la date de Paris, 1503, on lit : « Scientiam » numerandi compendiosam edidit nomine Algorismus, » unde et algorismus nuncupatur vel ars numerandi.... » L'algèbre de Mohammed est encore connue par une traduction latine qui fut publiée par Guillaume Libri et dont on connaît onze exemplaires manuscrits, dont quatre se trouvent à la Bibliothèque impériale, deux à la Bibliothèque du Vatican, deux à la Bibliothèque *Magliabecchiana* (Florence), deux à la Bibliothèque *Ambrosiniana* (Milan), un à la Bibliothèque de l'Université de Cambridge. Quelques-uns de ces exemplaires ne sont pas complets, et aucun n'est antérieur au XIVe siècle; le nom du traducteur n'y est pas indiqué. Robert de Chester, dont il reste d'autres travaux, aurait traduit de l'arabe en latin le livre de Mohammed en l'an 1183, d'après le témoignage d'Adrien Van Roomen (appelé en latin *Adrianus Romanus*), qui, dans son ouvrage intitulé : *In Mahvedis arabis Algebram prolegomena*, affirme posséder cette traduction. Un exemplaire imprimé de cet ouvrage existe dans la Bibliothèque publique de Douai; il fut indiqué par M. Chasles à M. Boncompagni dans une Lettre du 5 septembre 1852, où se trouve rapporté le passage suivant : « Mahumed filius Moysi, sicuti primus » omnium invenit, ita et primus omnium conscripsit » algebram linguà arabicà; quo autem tempore mihi » non constat. Opus vero ejus ex arabico in latinum » transtulit Robertus Cestrensis in civitate Segobiensi » anno 1183, est in Bibliothecà meà manuscriptum et » liberalitate D. Thaddæi Hageccii. Titulus libri est : » Incipit Liber restaurationis et oppositionis numero-

» rum, etc. » Ne voyant pas d'où Van Roomen aurait pu tirer ces détails qu'il rapporte, il faut penser que le manuscrit lui-même les contenait, et que, par conséquent, cette version diffère de celle qui a été publiée, et qui n'a ni date, ni nom d'auteur. De toute manière il semble que l'algèbre de Mohammed-ben-Mousa soit restée inconnue en Occident pendant les XIIe et XIIIe siècles, et que cet auteur ne fut alors célèbre en Europe que par son Traité d'Arithmétique, comme par la renommée plutôt que par des traductions vulgairement répandues; on arriva ainsi à prendre son nom l'*algorisma* dans la signification spéciale de *calcul décimal* ou encore dans le sens générique de *méthode de calcul*, lequel lui semble attribué dans la Préface du *Liber Abbaci* de Léonard de Pise.

RECTIFICATION.

A la page 336 du tome VII, 2e série, nous avons énoncé le théorème suivant proposé par M. Barbier : *Les différents points d'une courbe mobile engendrent une série de courbes dont l'enveloppe est la même que l'enveloppe de la courbe mobile.*

M. Catalan nous fait observer que l'on trouve démontré, à la page 183 de ses *Mélanges mathématiques* publiés au commencement de 1868, un théorème qui n'en diffère pas, savoir :

Quand une courbe ACB *roule sur une courbe* DCE *en entraînant une ligne* FPG, *l'enveloppe de celle-ci coïncide avec l'enveloppe des trajectoires de tous ses points.*

QUESTIONS.

929. Démontrer la formule

$$\frac{2}{\pi} = 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 - 13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \ldots$$

(CATALAN.)

930. Si l'on fait sur un plan B la perspective d'une figure tracée sur un plan A, il y a sur ces deux plans deux points correspondants b et a, tels que tout segment de la figure B est vu du point b sous le même angle que le segment correspondant de la figure A du point a.

(ABEL TRANSON.)

931. Lorsque x et y représentent les inverses des segments formés sur des axes de coordonnées par une droite mobile, l'équation $\varphi(x, y) = 0$ est, comme on sait, l'équation d'une courbe enveloppe de cette droite. Supposant les axes rectangulaires, on demande la signification géométrique de la fonction différentielle

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2},$$

et, par suite, ce que représente par rapport à la courbe $\varphi(x, y) = 0$ l'intégrale de cette fonction différentielle prise entre des limites données. (ABEL TRANSON.)

932. Le lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné construits sur les rayons de courbure d'une épicycloïde (cycloïde) ordinaire, et d'un même côté de ces rayons de courbure, est une épicycloïde (cycloïde) allongée ou raccourcie. (G. FOURET.)

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(suite et fin, voir 2e série, t. VII, p. 137);

PAR M. L. PAINVIN.

§ VII. — *L'équation en λ a quatre racines égales.*

42. Lorsque l'équation en λ a quatre racines égales, les trois cas suivants peuvent se présenter :

PREMIER CAS. — *Le cône correspondant à la racine quadruple est un cône proprement dit.*

Lorsque l'équation en λ a une racine quadruple, et que le cône (A) *correspondant à cette racine est un cône proprement dit, les deux surfaces ont en commun une droite; elles se touchent en un point unique sur cette droite, lequel est le sommet du cône* (A). *Les deux surfaces se coupent suivant cette droite et une courbe gauche du troisième ordre; cette courbe gauche touche la droite au point* A.

Réciproquement : *Si deux surfaces ont en commun une droite, et si la cubique gauche d'intersection touche cette droite, c'est-à-dire si les deux points de cette droite où les surfaces se touchent viennent à se confondre, l'équation en λ a ses quatre racines égales, et le cône correspondant est un cône proprement dit.*

Le point où les deux surfaces se touchent est le seul point qui ait même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ce plan polaire est le plan tangent commun.

DEUXIÈME CAS. — *Le cône, correspondant à la racine quadruple, se réduit à deux plans distincts.*

1° *Lorsque le cône, correspondant à la racine quadruple, se réduit à deux plans distincts, et que la droite* AB, *intersection de ces deux plans, n'appartient pas aux deux surfaces, cette droite* AB *touche les deux surfaces en un même point* A. *Les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes ; une de ces courbes est une conique proprement dite touchant en* A *l'intersection des deux plans; la seconde courbe se compose de deux droites qui se coupent en* A, *c'est-à-dire que l'un de ces plans est un plan tangent commun, et coupe les deux surfaces suivant les deux mêmes droites. La réciproque est vraie.*

Les points de la droite AB *ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces ; ce sont les seuls points jouissant de cette propriété ; ces plans polaires passant par une même droite, laquelle est conjuguée harmonique de* AB *par rapport aux deux droites communes aux deux surfaces.*

Un plan quelconque, passant par le point de contact A, *coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices ; le contact est du second ordre.*

2° *Lorsque la droite* AB, *intersection des deux surfaces, appartient aux deux surfaces, ces surfaces ont en commun trois droites :* AB, AD, BC; *les deux dernières rencontrent la première. Les deux surfaces se* RACCORDENT *suivant la droite* AB.

Tout plan passant par le point A *ou par le point* B, *coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices ; le contact est du second ordre.*

TROISIÈME CAS. — *Le cône, correspondant à la racine quadruple, se réduit à deux plans coïncidents.*

Les deux surfaces ont en commun deux droites situées

dans ce plan et se RACCORDENT *suivant ces deux droites. La réciproque est vraie.*

Tous les points de ce plan ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ces plans passent tous par le point de concours A des deux droites déjà signalées.

Un plan quelconque, passant par le point A, *coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices; le contact est du troisième ordre.*

I. *Le cône correspondant à la racine quadruple est un cône proprement dit.*

43. Prenons pour sommet A du tétraèdre de référence le sommet du cône correspondant à cette racine, l'équation du cône ne devra pas renfermer de termes en x, et on en conclut pour les équations des deux surfaces

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + A_{22}y^2 \\ &\qquad + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ &A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + B_{22}y^2 \\ &\qquad + B_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2B_{23}yz + 2B_{24}yt + 2B_{34}zt = 0; \end{aligned}\right.$$

l'équation en λ est alors

$$(2)\quad (\lambda+1)\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21}(\lambda+1) & B_{22}+\lambda A_{22} & B_{23}+\lambda A_{23} & B_{24}+\lambda A_{24} \\ A_{31}(\lambda+1) & B_{32}+\lambda A_{32} & B_{33}+\lambda A_{33} & B_{34}+\lambda A_{34} \\ A_{41}(\lambda+1) & B_{42}+\lambda A_{42} & B_{43}+\lambda A_{43} & B_{44}+\lambda A_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

et le cône correspondant à la racine -1 a pour équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(A_{22}-B_{22})y^2 + (A_{33}-B_{33})z^2 + (A_{44}-B_{44})t^2 \\ &\qquad + 2(A_{23}-B_{23})yz + 2(A_{24}-B_{24})yt + 2(A_{34}-B_{34})zt = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (2) doit admettre quatre fois la racine -1; en écrivant que le déterminant s'annule pour $\lambda = -1$,

il vient

$$(4)\qquad A_{11}\begin{vmatrix} B_{22}-A_{22} & B_{23}-A_{23} & B_{24}-A_{24} \\ B_{32}-A_{32} & B_{33}-A_{33} & B_{34}-A_{34} \\ B_{42}-A_{42} & B_{43}-A_{43} & B_{44}-A_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Le second facteur de l'égalité (4) exprime, en l'égalant à zéro, que le cône (3) se réduit à deux plans; laissant de côté cette hypothèse, on a donc

$$(1^{\circ})\qquad A_{11} = 0.$$

Les plans tangents en A, à chacune des surfaces (1), coïncident, et l'équation de ce plan tangent commun est

$$A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t = 0;$$

prenons ce plan pour face BAC du tétraèdre de référence, on devra faire

$$(2^{\circ})\qquad A_{12} = 0,\quad A_{13} = 0.$$

L'équation en λ devient alors

$$(5)\qquad A_{14}^2(\lambda+1)^2\begin{vmatrix} B_{22}+\lambda A_{22} & B_{23}+\lambda A_{23} \\ B_{32}+\lambda A_{32} & B_{33}+\lambda A_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

le coefficient A_{14} ne peut pas être nul, autrement les surfaces (1) se réduiraient à des cônes.

Écrivons que l'équation (5) admet trois fois la racine -1, il vient

$$(6)\qquad (B_{22}-A_{22})(B_{33}-A_{33})-(B_{23}-A_{23})^2 = 0;$$

l'égalité (6) exprime que le plan ABC, ou $t = 0$, touche le cône (3); prenons la génératrice de contact pour arête AB du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons

$$(3^{\circ})\qquad B_{22} = A_{22},\quad B_{23} = A_{23},$$

l'équation en λ devient

$$(7) \qquad (\lambda + 1)^3 \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32}(\lambda + 1) & B_{33} + \lambda A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Écrivons enfin que l'équation (7) admet quatre fois la racine -1, on trouve

$$A_{22}(B_{33} - A_{33}) = 0;$$

or, on ne peut pas supposer $B_{33} = A_{33}$, autrement le cône (3) se réduirait à deux plans; on devra donc faire

$$(4^\circ) \qquad A_{22} = 0 \quad \text{d'où} \quad B_{22} = 0.$$

Ainsi, les équations des deux surfaces se ramènent à la forme

$$(8) \quad \begin{cases} 2xt + 2dyz + az^2 + bt^2 + fyt + 2hzt = 0, \\ 2xt + 2dyz + a_1z^2 + b_1t^2 + f_1yt + 2h_1zt = 0; \end{cases}$$

et l'équation du cône (A), correspondant à la racine quadruple, est alors

$$(9) \ (\mathrm{A}) \quad (a - a_1)z^2 + (b - b_1)t^2 + 2(f - f_1)yt + 2(h - h_1)zt = 0.$$

Nous pouvons déjà conclure de là que :

« Lorsque l'équation en λ a une racine quadruple, et » que le cône (A) correspondant à cette racine est un » cône proprement dit, les deux surfaces ont en commun » une droite; elles se touchent en un point unique sur » cette droite, ce point est le sommet du cône correspon- » dant à la racine quadruple. Les deux surfaces se cou- » pent suivant une droite et une courbe du troisième or- » dre; la courbe gauche touche la droite. »

Réciproquement : « Si deux surfaces ont en commun » une droite, et si les deux points de cette droite où les » deux surfaces se touchent viennent à se confondre, » l'équation en λ a ses quatre racines égales, et le cône

» correspondant à la racine quadruple est un cône pro-
» prement dit. »

Nous laisserons de côté la démonstration de la réciproque.

44. Nous allons maintenant donner une forme plus simple aux équations (8) des deux surfaces.

Le plan BAC, ou $t = 0$, coupe chacune des surfaces suivant les deux droites

$$az^2 + 2dyz = 0, \quad a_1 z^2 + 2dyz = 0;$$

une de ces droites est commune, c'est la droite AB; les deux autres droites sont distinctes, car a_1 est différent de a, sans quoi le cône (9) se réduirait à deux plans.

Prenons l'une de ces droites pour arête AC du tétraèdre, c'est-à-dire supposons

$$(1^\circ) \qquad a_1 = 0;$$

nous choisirons ensuite pour face CAD le second plan tangent mené au cône (9) suivant l'arête AC, le premier est le plan CAB; d'ailleurs, ces deux plans ne peuvent pas se confondre, car l'arête AC ($y = 0$, $t = 0$) ne peut appartenir au cône, puisque $(a - a_1)$ n'est jamais nul. Nous prendrons enfin, pour arête AD, la génératrice de contact du plan CAD avec le cône (9); ce qui revient à supposer

$$(2^\circ) \qquad b_1 = b, \quad h_1 = h.$$

Les équations des deux surfaces deviennent par suite

$$(10) \quad \begin{cases} 2xt + 2dyz + az^2 + bt^2 + 2fyt + 2hzt = 0, \\ 2xt + 2dyz + bt^2 + 2f_1 yt + 2hzt = 0; \end{cases}$$

et celle du cône est

$$(11) \qquad \text{A}) \quad az^2 + 2(f - f_1)yt = 0$$

Dans le tétraèdre de référence, les arêtes AB, AC, AD sont seules déterminées ; il reste à choisir les trois sommets B, C, D.

Remarquons que la droite AD ($y=0$, $z=0$) rencontre les deux surfaces aux deux mêmes points ; l'un est le point A, l'autre est déterminé par l'équation

$$2x + bt = 0;$$

prenons ce dernier point pour sommet D, c'est-à-dire faisons

(3°) $$b = 0.$$

Les plans tangents en D à chacune des surfaces ont respectivement pour équations

$$f'_t = 0,$$

c'est-à-dire

$$x + fy + hz = 0,$$
$$x + f_1 y + hz = 0;$$

ces deux plans sont distincts, car le cône (11) étant un cône proprement dit, f_1 doit être différent de f ; nous choisirons pour face DBC le plan tangent à la seconde des surfaces (10), c'est-à-dire que nous supposerons

(4°) $$f_1 = 0, \quad h = 0.$$

Ainsi *les équations des deux surfaces pourront se ramener à la forme définitive*

(12) $$\begin{cases} \text{(S)} & xt + kyz + az^2 + fyt = 0, \\ \text{(T)} & xt + kyz = 0. \end{cases}$$

Le sommet A est le point où les deux surfaces se touchent ; AB est la droite commune ; BAC est le plan tangent commun en A. L'arête AC est la seconde des droites suivant lesquelles le plan BAC coupe la seconde surface.

CAD est le plan tangent au cône correspondant à la racine quadruple, AD est la génératrice de contact. Le sommet D est le second des points où la droite AD rencontre les deux surfaces, et DBC est le plan tangent en D à la seconde surface.

45. Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) par rapport aux surfaces (12), sont

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} xt_0 + y(kz_0 + ft_0) + z(ky_0 + 2az_0) + t(x_0 + fy_0) &= 0,\\ xt_0 + kyz_0 + kzy_0 + tx_0 &= 0;\end{aligned}\right.$$

à l'aide de ces équations on constate immédiatement que :

« Il y a un seul point qui ait même plan polaire par » rapport aux deux surfaces, c'est le point A où la cubi- » que gauche touche la droite commune AB ; le plan po- » laire est le plan tangent commun.

II. *Le cône correspondant à la racine quadruple se réduit à deux plans distincts.*

46. Nous prendrons ces deux plans pour faces ABC et ABD du tétraèdre de référence, les équations des deux surfaces seront les équations (1) du n° 25, et l'équation en λ sera l'équation (2) du n° 25.

Le déterminant de l'équation (2), n° 25, doit encore s'annuler pour $\lambda = -1$, ce qui donne

$$(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)(B_{34} - A_{34})^2 = 0;$$

or B_{34} est nécessairement différent de A_{34}, puisque les deux surfaces sont distinctes, il reste donc

$$(1)\qquad A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0.$$

Les points d'intersection de la droite AB avec les deux surfaces sont les mêmes, ils sont donnés par les équations

$$(2)\qquad z = 0,\quad t = 0,\quad A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = 0;$$

la relation (1) exprime précisément que les points (2) coïncident, c'est-à-dire que la droite AB touche les deux surfaces; prenons ce point de contact pour sommet A, on aura

$$(1^\circ) \qquad A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0.$$

L'équation en λ devient alors

$$(3) \quad (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32}(\lambda+1) & A_{33}(\lambda+1) & B_{34}+\lambda A_{34} \\ A_{41} & A_{42}(\lambda+1) & B_{43}+\lambda A_{43} & A_{44}(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Exprimons enfin que cette dernière équation admet la racine -1, on trouve

$$(4) \qquad A_{22} A_{13} A_{14} = 0,$$

en laissant de côté le facteur $(A_{34} - B_{34})$ qui ne peut être nul.

Nous avons ici deux cas à examiner, suivant que A_{22} est nul, ou que A_{13} est nul; l'hypothèse $A_{14} = 0$ ne donne rien d'essentiellement distinct de ce que fournit l'hypothèse $A_{13} = 0$; ces deux cas reviennent en définitive à ceux-ci, en ayant égard aux relations (1°) :

1° La droite AB n'est pas une droite commune aux deux surfaces, $A_{22} \lessgtr 0$;

2° La droite AB est une droite commune aux deux surfaces, $A_{22} = 0$.

47. 1° Supposons A_{22} différent de zéro et A_{14} nul.

Les équations des deux surfaces peuvent alors s'écrire

$$(5) \quad \begin{cases} (S) \quad y^2 + az^2 + bt^2 + 2cxz \\ \qquad\qquad + 2dyz + 2eyt + 2fzt = 0, \\ (T) \quad y^2 + az^2 + bt^2 + 2cxz \\ \qquad\qquad + 2dyz + 2eyt + 2f_1 zt = 0. \end{cases}$$

Le plan ABC, ou $t = 0$, coupe les deux surfaces suivant la conique

$$(6)\qquad y^2 + az^2 + 2cxz + 2dyz = 0;$$

la droite AB touche cette conique en A. Le plan ABD, ou $z = 0$, coupe les deux surfaces suivant les deux droites distinctes

$$(7)\qquad y^2 + bt^2 + 2eyt = 0,$$

ces deux droites se coupent au point A.

On voit par là que :

« Si le cône, correspondant à la racine quadruple, se » réduit à deux plans distincts, la droite AB, intersection » des deux plans, touche les deux surfaces au même » point A. Si cette droite n'est pas une génératrice com- » mune aux deux surfaces, ces deux surfaces se coupent » suivant deux courbes planes; une de ces courbes est » conique proprement dite touchant la droite d'intersec- » tion des deux plans en A; la seconde courbe se com- » pose de deux droites qui se coupent au point A, c'est- » à-dire que l'un des plans est un plan tangent commun » et coupe les deux surfaces suivant les deux mêmes » droites. »

Réciproquement : « Si les deux surfaces se coupent sui- » vant deux courbes planes, si l'intersection des deux » plans touche les deux surfaces au même point, et que » l'une des sections se compose de deux droites, l'équa- » tion en λ aura quatre racines égales, et le cône corres- » pondant se réduira à deux plans. »

On peut, d'après ces remarques, simplifier les équations (5).

Les plans polaires d'un plan quelconque

$$(x_0,\ y_0,\ z_0 = 0,\ t_0 = 0),$$

situé sur la droite AB, ont pour équation

$$(8) \qquad cx_0 z + y_0(y + dz + et) = 0;$$

ces plans passent tous par la droite fixe, située dans le plan ABD,

$$z = 0, \quad y + et = 0;$$

prenons cette droite pour AD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire faisons

$$e = 0,$$

l'équation (7) devient alors

$$y^2 + bt^2 = 0.$$

On conclut de là :

« Les points de l'intersection des deux plans ABC et » ABD ont même plan polaire par rapport aux deux sur- » faces, et ce sont les seuls qui jouissent de cette pro- » priété; tous ces plans passent par une droite fixe AD » qui est conjuguée harmonique de AB par rapport aux » deux droites qui constituent la section commune aux » deux surfaces situées dans le plan ABD. »

Le plan ABC, ou $t = 0$, coupe les deux surfaces suivant la conique (6); prenons : pour sommet C, un des points de cette conique; pour face BCD, le plan tangent en C à l'une des surfaces (5), à la seconde, par exemple; ceci revient à supposer

$$a = 0, \quad d = 0, \quad f_1 = 0.$$

Eu égard à ces hypothèses, *les équations des deux surfaces prennent la forme définitive*

$$(9) \quad \begin{cases} (\mathrm{S}) & y^2 + bt^2 + 2cxz + 2fzt = 0, \\ (\mathrm{T}) & y^2 + bt^2 + 2cxz = 0. \end{cases}$$

« Si l'on mène un plan quelconque par le point de

» contact des deux surfaces, ce plan les coupe suivant
» des coniques osculatrices; le contact est du second
» ordre. »

En effet, soit l'équation d'un plan quelconque passant par le sommet A

$$(10) \qquad z = \alpha y + \beta t,$$

si l'on substitue cette valeur de z dans les équations (9), il vient

$$(11) \begin{cases} y^2 + 2\alpha c x y + (b + 2f\beta)t^2 + 2\alpha f y t + 2c\beta x t = 0, \\ y^2 + 2\alpha c x y + b t^2 + 2c\beta x t = 0; \end{cases}$$

l'équation en μ relative à ces deux cônes de même sommet est

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha c(\mu+1) & \beta c(\mu+1) \\ \alpha c(\mu+1) & \mu+1 & \alpha f \\ \beta c(\mu+1) & \alpha f & b(\mu+1)+2f\beta \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } (\mu+1)^3 = 0;$$

d'ailleurs les plans tangents communs correspondants sont distincts; par conséquent, les cônes sont osculateurs et le contact est du second ordre; donc....

48. 2° Supposons A_{22} nul, c'est-à-dire que la droite AB appartient aux surfaces.

Eu égard à l'hypothèse actuelle et aux hypothèses (1°) du n° 46, les équations (1) du n° 25 des deux surfaces deviennent

$$(12) \begin{cases} (S)\ a z^2 + b t^2 + 2c x z + 2d x t + 2e y z + 2g y t + 2f z t = 0, \\ (T)\ a z^2 + b t^2 + 2c x z + 2d x t + 2e y z + 2g y t + 2f_1 z t = 0. \end{cases}$$

Le plan ABC, ou $t = 0$, coupe les deux surfaces suivant deux droites communes, savoir

$$z(az + 2cx + 2ey) = 0;$$

l'une d'elles est la droite AB; la seconde ne peut pas se confondre avec AB, car il faudrait pour cela qu'on eût $c = 0$, $e = 0$, et les deux surfaces se réduiraient alors à des cônes. Nous pouvons donc prendre cette seconde droite pour arête BC ($x = 0$, $z = 0$) du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$a = 0, \quad e = 0.$$

Le plan ABD, ou $z = 0$, coupe les deux surfaces suivant les deux droites communes

$$t(bt + 2dx + 2gy) = 0:$$

l'une d'elles est la droite AB; la seconde ne peut pas se confondre avec AB; nous pouvons donc la prendre pour arête AD ($y = 0$, $z = 0$) du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$b = 0, \quad d = 0.$$

Les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(13)\quad \begin{cases} (S) & cxz + gyt + fzt = 0, \\ (T) & cxz + gyt + f_1 zt = 0. \end{cases}$$

Nous constatons d'abord que :

« Si le cône correspondant à la racine quadruple se » réduit à deux plans et que la droite AB, intersection » de ces deux plans, appartienne aux deux surfaces, ces » deux surfaces auront en commun trois génératrices : » l'une d'elles est la droite AB; les deux autres, AD et BC, » s'appuient sur la droite AB. »

Les équations des plans tangents à chacune des surfaces (13), en un point quelconque (x_0, y_0, $z_0 = 0$, $t_0 = 0$) de la droite AB, sont

$$cx_0 z + gy_0 t = 0, \quad cx_0 z + gy_0 t = 0.$$

Ces plans tangents sont les mêmes, donc :

« Les deux surfaces ont même plan tangent en tous les » points de la droite AB, c'est-à-dire se touchent en tous » les points de cette droite, ou encore se *raccordent* sui- » vant cette droite. »

Les plans tangents en un point $(x_0, y_0 = 0, z_0, t_0 = 0)$ de la droite AC, sont

$$cx_0 z + z_0(cx + ft) = 0, \quad cx_0 z + z_0(cx + f_1 t) = 0;$$

on voit que les surfaces (13) ne se raccordent pas suivant la droite AC ; il en est de même pour la troisième génératrice commune AD.

Nous prendrons, pour sommet C, un point arbitraire de la droite AC, et pour face BCD, le plan tangent à la seconde surface, par exemple ; ce qui conduit à la condition $f_1 = 0$.

D'après ce choix du tétraèdre, les *équations des deux surfaces prendront la forme définitive*

$$(14) \qquad \begin{cases} (\mathrm{S}) & cxz + gyt + fzt = 0, \\ (\mathrm{T}) & cxz + gyt = 0. \end{cases}$$

On démontrera sans difficulté la proposition réciproque, savoir :

« Si deux surfaces se raccordent suivant une même » génératrice commune, l'équation en λ a ses quatre » racines égales ; le cône correspondant à la racine qua- » druple se réduit à deux plans, et l'intersection de ces » deux plans est la génératrice commune. »

Je signalerai encore la propriété suivante :

« Si l'on mène un plan quelconque par le point A, il » coupe les deux surfaces suivant des coniques oscula- » trices ; le contact est du second ordre. La même chose » a lieu pour le point B. »

En effet, l'équation d'un plan quelconque, passant par

le point A, est

$$y = \alpha z + \beta t;$$

substituons cette valeur dans les équations (14), il vient

$$(15) \qquad \begin{cases} cxz + (\alpha g + f) zt + \beta g t^2 = 0, \\ cxz + \alpha g zt + \beta g t^2 = 0; \end{cases}$$

l'équation en μ relative à ces deux cônes est

$$\begin{vmatrix} 0 & c(\mu+1) & 0 \\ c(\mu+1) & 0 & \alpha g(\mu+1)+f \\ 0 & \alpha g(\mu+1)+f & \beta g(\mu+1) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad (\mu+1)^3 = 0;$$

d'ailleurs les plans sécants communs correspondants sont distincts; par conséquent, les deux cônes sont osculateurs, et le contact est du second ordre ; donc. . . .

III. *Le cône correspondant à la racine quadruple se réduit à deux plans coïncidents.*

49. Prenons ce plan pour face ABC du tétraèdre de référence, les équations des deux surfaces seront les équations (1) du n° 28, et l'équation en λ sera l'équation (2) du n° 28.

Écrivons que l'équation (2), n° 28, admet encore la racine -1, il vient

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

la relation (1) exprime que la section des deux surfaces (1), n° 28, par le plan ABC, ou $t = 0$, se réduit à deux droites. Prenons ces deux droites pour arêtes AB et AC du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons

$$A_{11} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{33} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0,$$

les équations des deux surfaces deviendront

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} A_{44} t^2 + A_{14} xt + A_{23} yz + A_{24} yt + A_{34} zt = 0, \\ \frac{1}{2} B_{44} t^2 + A_{14} xt + A_{23} yz + A_{24} yt + A_{34} zt = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs la constante A_{23} ne peut pas être nulle, car on aurait alors deux plans ; les équations (2) pourront donc s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} (S) \quad yz + axt + byt + czt + dt^2 = 0, \\ (T) \quad yz + axt + byt + czt + d_1 t^2 = 0. \end{cases}$$

Les plans tangents en un point quelconque

$$(x_0, y_0, z_0 = 0, t_0 = 0)$$

de la droite AB sont les mêmes, car leur équation est

$$ax_0 t + y_0(z + bt) = 0;$$

donc : « Lorsque l'équation en λ a quatre racines égales » et que le cône correspondant à la racine quadruple se » réduit à deux plans coïncidents, les deux surfaces ont » en commun deux droites situées dans ce plan, et se » raccordent suivant ces deux droites. La réciproque est » vraie. »

On constatera aussi que :

« Tous les points du plan ABC ont même plan polaire » par rapport aux deux surfaces, et ces plans passent tous » par le point de concours A des deux droites. »

50. Pour simplifier les équations (3), nous prendrons, pour sommet B, un point arbitrairement choisi sur la droite AB, et pour face ABD, le plan tangent commun en B aux deux surfaces, ce qui revient à supposer

$$b = 0;$$

nous prendrons ensuite, pour sommet C, un point arbitrairement choisi sur la droite AC, et pour face ACD, le plan tangent commun en C aux deux surfaces, ce qui revient à supposer

$$c = 0;$$

les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(4)\quad \begin{cases} (\mathrm{S}) & yz + axt + dt^2 = 0, \\ (\mathrm{T}) & yz + axt + d_1 t^2 = 0. \end{cases}$$

Enfin, nous prendrons, pour sommet D, le point où la droite AD rencontre la seconde surface; on devra faire $d_1 = 0$. *Les équations des deux surfaces se ramènent à la forme définitive*

$$(5)\quad \begin{cases} (\mathrm{S}) & yz + axt + dt^2 = 0, \\ (\mathrm{T}) & yz + axt = 0. \end{cases}$$

« Un plan quelconque, passant par le point A, coupe » les deux surfaces suivant des coniques osculatrices ; le » contact est du troisième ordre. »

En effet, l'équation d'un plan quelconque, passant par le sommet A, est

$$y = \alpha z + \beta t;$$

remplaçons y par cette valeur dans les équations (5), il vient

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha z^2 + \beta zt + axt + dt^2 = 0, \\ \alpha z^2 + \beta zt + axt = 0; \end{cases}$$

l'équation en μ relative à ces deux cônes de même sommet, est

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a(\mu+1) \\ 0 & 2\alpha(\mu+1) & \beta(\mu+1) \\ a(\mu+1) & \beta(\mu+1) & 2d \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad (\mu+1)^3 = 0;$$

d'ailleurs le système des plans sécants communs t corres-

pondant à cette racine triple se réduit à deux plans coïncidents ; par conséquent, les cônes sont osculateurs et le contact est du troisième ordre ; donc. . . .

§ VIII. — *L'équation en λ a des racines nulles : des racines infinies.*

I. *L'équation en λ a des racines nulles seulement.*

51 Dans ce paragraphe, je ne ferai qu'indiquer les résultats.

1° L'équation en λ a une seule racine nulle.

« Une des surfaces est un cône (ou un cylindre) pro-
» prement dit ; le sommet de ce cône n'est pas situé sur
» la surface proprement dite. »

Il y aura alors à distinguer trois cas, suivant que les trois autres racines, différentes de zéro, sont inégales, ou que deux sont égales, ou que les trois sont égales. La discussion de ces hypothèses pourra se faire en suivant une marche tout à fait semblable à celle qui a été développée dans les paragraphes I, II, III, IV, V ; d'ailleurs les conclusions essentielles restent les mêmes.

2° L'équation en λ a deux racines nulles.

« Une des surfaces est un cône, alors deux cas se pré-
» sentent :

» Si l'on a un cône proprement dit, le sommet de ce
» cône est sur la seconde surface. (Conclusions sem-
» blables à celles du n° 14, premier cas.)

» Si le cône se réduit à deux plans, l'arête de ce sys-
» tème ne touche pas la seconde surface qui est une sur-
» face proprement dite. »

3° L'équation en λ a trois racines nulles.

« L'une des surfaces est un cône, et les cas suivants
» peuvent se présenter :

» Si c'est un cône proprement dit, son sommet se

» trouve sur la seconde surface, et le cône touche le plan
» tangent à la surface en ce point. (Conclusions analo-
» gues à celles du n° 21, premier cas.)

» Si le cône se réduit à deux plans distincts, leur
» droite d'intersection touche alors la seconde surface.

» Il peut encore arriver que le cône se réduise à deux
» plans coïncidents ; ce plan ne touche pas la seconde sur-
» face. »

4° L'équation en λ a quatre racines nulles.

« Une des surfaces est un cône (ou un cylindre).

» Si l'on a un cône proprement dit, le sommet est sur
» la seconde surface; le cône touche le plan tangent en
» ce point à la seconde surface, et de plus, la génératrice
» de contact est commune au cône et à la surface.
» (Conclusions analogues à celle du n° 42, premier cas.)

» Si le cône se réduit à deux plans distincts, ou la
» droite d'intersection touche la seconde surface, et l'un
» des plans touche la surface en ce point, ou bien, la
» droite d'intersection appartient à la surface.

» Si le cône se réduit à deux plans coïncidents, ce plan
» touche alors la seconde surface. »

Remarque. — Les conclusions sont les mêmes si l'équation en λ admet des racines infinies seulement.

II. *L'équation en λ admet des racines nulles et des racines infinies.*

52. Lorsque l'équation en λ admet des racines nulles et des racines infinies, les deux surfaces sont des cônes ou des cylindres; il est entendu que la dénomination de cône signifiera cône ou cylindre.

1° L'équation en λ a une racine nulle et une racine infinie.

« Lorsque l'équation en λ a une racine nulle et une
» racine infinie, et que les deux autres racines sont

» distinctes, l'intersection des deux cônes est une courbe
» du quatrième ordre; on rentre dans le cas général.

» Si les deux autres racines sont égales, la courbe gau-
» che possède un point double; les deux cônes se tou-
» chent en un point non situé sur la ligne des sommets;
» il peut arriver aussi que les deux cônes soient bitan-
» gents et se coupent suivant deux courbes planes. (Con-
» clusions générales analogues à celles du n° 14, pre-
» mier et deuxième cas.) »

2° L'équation en λ a deux racines nulles et une racine infinie.

« Le sommet du cône (A) correspondant à la racine
» double zéro se trouve sur le second cône (B) corres-
» pondant à la racine infinie. Les deux cônes se coupent
» suivant une courbe du quatrième ordre ayant un point
» double en A; les tangentes en ce point double sont les
» intersections du cône (A) par le plan tangent au
» cône (B) suivant l'arête BA.

» Le sommet du cône (A) se trouve également sur le
» cône (C), passant par l'intersection des cônes (A) et
» (B) et correspondant à la racine de l'équation en λ qui
» n'est ni nulle, ni infinie; le cône (C) touche suivant
» l'arête CA le plan tangent au cône (B) suivant l'a-
» rête BA. »

Il peut arriver que le cône (A) se réduise à deux plans distincts.

3° L'équation en λ a trois racines nulles et une racine infinie.

« Le cône (A) correspondant à la racine nulle a son som-
» met sur le cône (B) correspondant à la racine infinie;
» le plan tangent au cône (B) suivant l'arête BA, touche
» également le cône (A) suivant une arête AC distincte
» de AB. Les deux cônes se coupent suivant une courbe
» du quatrième ordre ayant un point de rebroussement

» en A; la tangente de rebroussement est la droite AC. »

4° L'équation en λ a deux racines nulles et deux racines infinies.

« Les deux cônes ont une génératrice commune; s'ils » ne se touchent pas suivant cette génératrice, leur in- » tersection est une courbe gauche du troisième ordre.

» S'ils se touchent suivant cette génératrice, leur » courbe d'intersection se composera de deux droites » coïncidant avec la génératrice commune, et d'une » courbe plane; mais alors l'équation en λ se réduit à » une identité. »

III. *Cas où l'équation en λ se réduit à une identité.*

53. L'équation en λ se réduit à une identité dans les cas suivants :

1° Lorsque les surfaces sont deux cônes ayant une génératrice commune et se touchant suivant cette génératrice ;

2° Lorsqu'on a deux cônes ayant même sommet;

3° Lorsque les surfaces sont deux cylindres paraboliques ayant même plan directeur;

4° Lorsque les deux surfaces sont des cylindres parallèles;

5° Lorsqu'une des surfaces est un cône, et que l'autre est un système de plans dont l'arête passe par le sommet du cône; ou bien encore, un système de plans dont l'un touche le cône; ou encore, un système de deux plans coïncidents et passant par le sommet du cône;

6° Lorsqu'une des surfaces étant un cylindre, l'autre est un système de plans dont l'arête est parallèle aux génératrices du cylindre; ou encore, un système de plans dont l'un touche le cylindre ;

7° Lorsque les surfaces se réduisent à des systèmes de

deux plans et que les arêtes de ces systèmes se rencontrent.

Toutes ces propositions sont faciles à vérifier. On peut aussi les conclure d'une analyse régulière semblable à celle qui a été plusieurs fois répétée, et montrer ainsi que ce sont les seuls cas où l'équation en λ se réduit à une identité.

§ IX. — *Détermination des branches infinies de la courbe d'intersection des deux surfaces du second ordre.*

I. *Détermination générale.*

54. Je remarque d'abord qu'on obtiendra la direction des branches infinies de la courbe d'intersection en cherchant les génératrices communes aux *cônes des directions asymptotiques* (C) et (C′) des deux surfaces considérées.

L'asymptote en un de ces points à l'infini sera l'intersection des plans asymptotes correspondants dans chacune des deux surfaces.

La courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre a, en général, quatre points à l'infini (réels ou imaginaires); et, d'après ce qu'on vient de dire, les directions asymptotiques relatives à ces points sont les génératrices communes aux deux cônes des directions asymptotiques.

Mais la discussion de l'intersection de ces deux cônes ayant même sommet, présente les mêmes circonstances que celle de l'intersection des deux coniques, puisque les équations de ces deux cônes (qu'on peut regarder comme ayant pour sommet commun l'origine des coordonnées) sont assimilables aux équations de deux coniques.

D'après cela, les cas suivants pourront se présenter :

1° Les cônes de directions asymptotiques se coupent suivant quatre racines génératrices.

La discussion faite comme dans le cas des coniques nous indiquera si les quatre génératrices communes sont réelles, ou si deux seulement sont réelles, ou si les quatre sont imaginaires, c'est-à-dire si la courbe gauche a quatre points réels à l'infini, ou deux seulement, ou si les quatre points sont imaginaires; les branches infinies ont, dans ce cas, leurs asymptotes à distance finie.

2° Les cônes (C) et (C′) se touchent.

Les plans asymptotes correspondants sont alors parallèles, par conséquent l'asymptote correspondante de la courbe gauche se trouve transportée à l'infini parallèlement à la direction asymptotique considérée.

Ainsi la courbe gauche a deux points distincts (réels ou imaginaires) à l'infini, elle touche, en outre, la droite de l'infini parallèle à la génératrice de contact des deux cônes (C) et (C′).

3° Les cônes (C) et (C′) sont bitangents.

Les asymptotes sont encore à l'infini; la courbe d'intersection a deux couples de points coïncidents à l'infini, elle touche le plan de l'infini en deux points; les asymptotes relatives à ces deux points sont à l'infini et respectivement parallèles aux génératrices de contact des deux cônes (C) et (C′).

4° Les cônes (C) et (C′) sont osculateurs, et le contact est du second ordre.

La courbe gauche a deux points réels à l'infini; l'un est un point simple et ordinaire, l'autre est un point d'inflexion; la tangente d'inflexion est la droite de l'infini parallèle à l'arête de contact de deux cônes.

5° Les cônes (C) et (C′) sont osculateurs, et le contact est du troisième ordre.

Les quatre points d'intersection de la courbe gauche

avec le plan de l'infini se confondent; la droite à l'infini, parallèle à la génératrice de contact des deux cônes, touche la courbe gauche et a avec elle un contact du troisième ordre.

Remarque. — Ces conséquences sont évidemment applicables aux cas où les cônes (C) et (C′) ne sont pas des cônes proprement dits; ainsi, un des cônes ou tous les deux peuvent se réduire soit à un système de plans distincts, soit à un système de plans coïncidents.

Lorsqu'un des cônes, (C) par exemple, se réduit à un système de deux plans coïncidents, les deux cônes seront bitangents si le cône (C′) est un cône proprement dit, ou bien s'il est composé de deux plans distincts; les quatre génératrices seront confondues si le cône (C′) se réduit également à un système de deux plans coïncidents.

II. *Cas particuliers.*

55. Je terminerai cette question par l'examen de plusieurs cas particuliers.

1° Les deux cônes (C) et (C′) sont parallèles.

Dans ce cas, les deux surfaces sont homothétiques; elles se coupent suivant deux courbes planes, dont une est dans le plan de l'infini; c'est le deuxième cas du n° 14.

2° Les cônes (C) et (C′) étant composés de deux plans, un plan de l'un des systèmes est parallèle à un plan de l'autre système.

Si l'on prend pour plan yoz le plan directeur commun, et pour plans xoz et xoy des plans parallèles aux deux autres plans, les équations des deux surfaces seront

$$xy + ax + by + cz + d = 0,$$
$$xz + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0.$$

On voit aisément que l'équation en λ a deux couples de racines égales, ces deux surfaces ont en commun la droite

de l'infini ($x = 0$, $y = 0$); un plan quelconque, parallèle au plan yoz, coupe l'une et l'autre surface suivant cette droite à l'infini, et chacune d'elles suivant une droite à distance finie. Les conclusions du n° 30, premier cas, sont applicables au cas actuel, en transportant à l'infini les points A et B.

3° Le cône (C) est un système de deux plans distincts, et le cône (C′) se réduit à deux plans coïncidents parallèles à l'un des plans (C).

Les équations des deux surfaces pourront s'écrire

$$xy + ax + by + cz + d = 0,$$
$$x^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0;$$

une de ces surfaces est un cylindre parabolique. L'équation en λ possède encore deux couples de racines égales; les deux surfaces ont en commun la droite de l'infini ($x = 0$, $t = 0$); les conclusions du n° 30, premier cas, sont encore applicables au cas actuel.

4° Les cônes (C) et (C′) se réduisent à des systèmes de plans coïncidents, et ces plans sont parallèles.

Les équations des deux surfaces pourront s'écrire

$$x^2 + ax + by + cz = 0,$$
$$x^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0;$$

on a deux cylindres paraboliques; ces surfaces sont homothétiques et se coupent suivant deux courbes planes, dont une est le plan de l'infini; dans ce cas l'équation en λ se réduit à une identité.

§ X. — Résumé.

I. *L'équation en λ a ses quatre racines réelles et distinctes.*

1° Si les quatre cônes sont réels, on a une courbe réelle du quatrième ordre.

2° Si deux des cônes sont imaginaires, on a une courbe imaginaire du quatrième ordre.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 t^2 = 0;$$

les coefficients sont réels.

II. *L'équation en λ a deux racines réelles et deux imaginaires.*

Deux des cônes sont réels, les deux autres sont imaginaires ; on a une courbe réelle du quatrième ordre.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$x^2 + ay^2 + b(z^2 - t^2) + 2dzt = 0,$$
$$x^2 + a_1 y^2 + b_1(z^2 - t^2) + 2d_1 zt = 0;$$

les coefficients sont réels.

III. *L'équation en λ a ses quatre racines imaginaires.*

Les quatre cônes sont imaginaires ; on a une courbe réelle du quatrième ordre.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$a(x^2 - y^2) + c(z^2 - t^2) + 2bxy + 2dzt = 0,$$
$$a_1(x^2 - y^2) + c_1(z^2 - t^2) + 2b_1 xy + 2d_1 zt = 0;$$

les coefficients sont réels.

IV. *L'équation en λ a deux racines égales.*

1° Le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit ; les deux surfaces se touchent en un point ; on a une courbe du quatrième ordre ayant un point double ordinaire.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$by^2 + cz^2 + dt^2 + 2xt = 0,$$
$$b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 t^2 + 2xt = 0.$$

2° Le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts; les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes, et se touchent en deux points non situés sur une génératrice commune.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$az^2 + bt^2 + 2xy + 2c\,zt = 0,$$
$$az^2 + bt^2 + 2xy + 2c_1\,zt = 0.$$

V. *L'équation en λ a trois racines égales.*

1° Le cône correspondant à la racine triple est un cône proprement dit; les deux surfaces se touchent en un point; on a une courbe du quatrième ordre ayant un point de rebroussement.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$ay^2 + 2xt + bz^2 + 2cyt = 0,$$
$$k(ay^2 + 2xt) + bz^2 + 2cyt = 0.$$

2° Le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans distincts; les deux surfaces se touchent en un point unique et se coupent suivant deux courbes planes qui se touchent en ce point.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$y^2 + 2a\,xz + 2b\,xt + 2c\,zt = 0,$$
$$y^2 + 2a\,xz + 2b\,xt + 2c_1\,zt = 0.$$

3° Le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans coïncidents; les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre; la courbe de contact est une conique proprement dite.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d_1t^2 = 0.$$

VI. *L'équation en λ a deux couples de racines égales.*

1° Les deux cônes correspondants aux racines doubles sont des cônes proprement dits ; les surfaces ont en commun une droite, se touchent en deux points de cette droite, et se coupent suivant une cubique gauche rencontrant la droite en ces deux points.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$2xz + ct^2 + az^2 + 2dyt = 0,$$
$$2xz + ct^2 + k(az^2 + 2dyt) = 0.$$

2° Un des cônes est un cône proprement dit, et l'autre se réduit à deux plans distincts ; les deux surfaces se touchent en trois points et se coupent suivant deux courbes planes, dont l'une est un système de deux droites et l'autre une conique proprement dite.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$yt + cz^2 + d\,xz = 0,$$
$$yt + cz^2 + d_1\,xz = 0.$$

3° Les deux cônes se réduisent à un système de deux plans ; les deux surfaces ont en commun les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et se touchent en quatre points.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$xy + a\,zt = 0,$$
$$xy + a_1\,zt = 0.$$

VII. *L'équation en λ a quatre racines égales.*

1° Le cône correspondant à la racine quadruple est un cône proprement dit ; les deux surfaces ont en commun une droite, et se touchent en un point unique sur cette droite ; elles se coupent suivant une cubique gauche qui touche la droite en ce point.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$xt + kyz + az^2 + byt = 0,$$
$$xt + kyz = 0.$$

2° Le cône correspondant à la racine se réduit à deux plans distincts; soit AB leur intersection.

I. Si AB n'appartient pas aux deux surfaces, un des plans touche les deux surfaces et les coupe suivant les deux mêmes droites; l'autre plan les coupe suivant une conique touchant AB au point où viennent se couper les deux droites.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$y^2 + bt^2 + 2cxz + 2dzt = 0,$$
$$y^2 + bt^2 + 2cxz = 0.$$

II. Si AB appartient aux deux surfaces, les deux surfaces ont en commun deux autres droites s'appuyant sur AB et *se raccordent* suivant AB.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$axz + byt + czt = 0,$$
$$axz + byt = 0.$$

3° Le cône correspondant se réduit à deux plans coïncidents; les deux surfaces ont en commun deux droites situées dans ce plan et *se raccordent* suivant ces deux droites.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$yz + axt + dt^2 = 0,$$
$$yz + axt = 0.$$

Pour le cas des racines nulles et infinies, je renverrai au § VIII, où se trouve le résumé relatif à ces cas particuliers.

Observation. — La discussion que nous venons de faire conduit, en interprétant les équations dans le système des coordonnées tangentielles, à la classification des *développables circonscrites* à deux surfaces du second ordre.

DE LA TRANSFORMATION ISOGONALE ET DE LA TRANSFORMATION ISOLOGIQUE DES FIGURES PLANES;

Par M. Abel TRANSON.

1. Je traiterai dans cette Note du mode de transformation dans lequel à un point de la figure transformée correspond un point de la figure transformante. On verra que ce mode de transformation se subdivise en deux autres, auxquelles s'appliquent naturellement les dénominations de *transformation isogonale* et de *transformation isologique*.

2. Soient x, y les coordonnées d'un point ω de la figure transformée; X, Y celles du point Ω qui lui correspond dans la figure transformante. Les formules de transformation seront

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

où φ et ψ représentent des fonctions bien déterminées. Je supposerai d'ailleurs que les coordonnées x et y soient rapportées aux mêmes axes que les X et Y.

Cela posé, si du point (x, y) on passe à un point voisin $(x + dx, y + dy)$, on passera en même temps du point transformant (X, Y) à un point voisin correspondant $(X + dX, Y + dY))$, et comme on a les relations

$$dX = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy, \quad dY = \frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy,$$

si l'on appelle t le coefficient d'inclinaison $\frac{dy}{dx}$, et T le

coefficient d'inclinaison correspondante $\frac{dY}{dX}$, on aura

$$T = \frac{\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}t}{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}t}.$$

On voit qu'à une valeur de t correspond une valeur unique de T, et réciproquement ; d'où l'on peut conclure immédiatement que si l'on considère autour du point ω quatre points o, o', o'', o''', qui en soient infiniment voisins ; et autour du point Ω les quatre points infiniment voisins correspondants O, O′, O″, O‴ ; les quatre directions ωo, $\omega o'$, $\omega o''$, $\omega o'''$ auront le même rapport anharmonique que les quatre directions correspondantes ΩO, ΩO′, ΩO″, ΩO‴ ; ce qu'on peut énoncer sous une forme plus générale de la manière suivante :

Théorème. — *Un faisceau de directions issues du point ω et le faisceau des directions correspondantes issues du point Ω sont des faisceaux homographiques.*

Il résulte de ce théorème que si l'on considère à la fois un nombre quelconque de courbes tracées sur la première figure et passant toutes au point ω, et les courbes correspondantes de la seconde figure passant toutes au point Ω, le faisceau des tangentes aux premières en leur point commun ω sera homographique avec le faisceau des tangentes menées aux courbes qui passent en Ω.

3. Calculons maintenant la tangente de l'angle entre deux directions correspondantes issues des points ω et Ω : si nous supposons les axes de coordonnées rectangulaires,

la tangente de cet angle aura pour expression

$$\frac{\mathrm{T}-t}{1+\mathrm{T}.t}=\frac{\frac{d\psi}{dx}+\left(\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dx}\right)t-\frac{d\varphi}{dy}t^2}{\frac{d\varphi}{dx}+\left(\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\psi}{dx}\right)t+\frac{d\psi}{dy}t^2}.$$

Relativement à un point déterminé (x, y), cette expression varie avec t, à moins qu'on n'ait à la fois

$$\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\psi}{dx}=0,\quad \frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

parce qu'alors la tangente en question a pour valeur

$$-\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dx}}.$$

Lorsque les fonctions φ et ψ satisfont à ces deux conditions pour toutes les valeurs de x et de y, les deux faisceaux de directions correspondantes issues des deux points correspondants ne sont pas seulement homographiques, ils sont *semblables*; car l'angle de deux rayons de l'un est égal à l'angle des rayons correspondants de l'autre. Les orientations seules des deux faisceaux diffèrent entre elles; et précisément elles diffèrent de l'angle dont la tangente a pour valeur $-\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dx}}$. Il arrive alors que deux courbes quelconques de la figure transformante se rencontrent sous le même angle que les deux courbes transformées. M. Siebeck, dans un Mémoire très-intéressant inséré dans le *Journal de Crelle* (1858), dit alors que la transformation est *isogonale*.

Lorsque la transformation n'est point *isogonale*, nous dirons qu'elle est *isologique*, pour exprimer le genre

d'égalité (*entre rapports*) que présentent dans cette circonstance plus générale deux faisceaux correspondants. Or il est digne de remarque qu'une transformation isologique est toujours isogonale relativement à des points isolés du plan, lesquels points sont en nombre limité ou illimité selon la nature des fonctions φ et ψ.

Mais remarquons que deux faisceaux peuvent être homographiques directement ou inversement selon que les angles correspondants se suivent dans le même sens de rotation ou dans un sens de rotation contraire. De même la similitude peut être directe ou inverse.

Pour trouver les conditions qui distinguent la similitude directe de la similitude inverse, construisons relativement au point transformé (x, y) la tangente de l'angle Θ entre les deux directions transformantes T_1, T_0, qui correspondent aux directions transformées t_1, t_0; et, pour simplifier, supposons $t_0 = 0$. On trouve

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}\right)t_1}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right)t_1}.$$

Or $\operatorname{tang}\Theta$ doit être égale à $\pm t_1$ selon que la similitude est directe ou inverse; cela conduit aux doubles équations

$$\frac{d\varphi}{dy} \pm \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} \mp \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

dont les signes supérieurs donnent lieu à deux faisceaux directement, et les inférieurs à deux faisceaux inversement, semblables.

Il résulte de cette discussion que toute transformation isologique est directement isogonale pour tous les points déterminés par le système d'équations

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

et inversement semblable pour les points qui satisfont au second système. Ajoutons qu'elle serait isogonale le long d'une courbe continue si les deux équations de l'un de ces systèmes rentraient l'une dans l'autre.

4. Appelons m le rapport des deux éléments correspondants ωo, ΩO; on verra aisément que toute courbe transformée satisfaisant à l'équation différentielle

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2-m^2\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2-m^2=0,$$

où m est un paramètre constant, aura ses éléments dans un rapport de longueur constant avec ceux de la courbe correspondante. Et, par suite, sur deux telles courbes deux arcs finis correspondants auront entre eux ce même rapport.

Dans le cas des transformations isogonales, l'équation ci-dessus se ramène à la forme suivante :

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2-m^2\right]\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]=0.$$

Et alors, en égalant à zéro le premier facteur, on obtient la transformée unique qui (pour une valeur donnée de m) donne lieu à la circonstance en question (*).

5. Dans la transformation que M. Chasles a appelée *homographie*, à chaque point de l'une des figures correspond un point unique de l'autre. Et d'après les formes des fonctions φ et ψ qui conviennent à cette transforma-

(*) Je remarquerai ici que M. Siebech, dans son Mémoire cité ci-dessus, a indiqué, à l'occasion de la transformation isogonale, l'existence de certaines courbes dont les arcs correspondants ont un rapport constant; mais il résout la question autrement et sans en faire aucune application.

tion, il est aisé de reconnaître qu'elle est isologique. Mais, outre qu'*à un point de l'une des figures homographiques correspond un point de l'autre*, il faut ajouter qu'*à chaque droite de l'une correspond une droite unique de l'autre.*

Ces deux relations, correspondance de point à point et correspondance de droite à droite, entraînent comme conséquences toutes les autres relations descriptives et aussi toutes les relations métriques des figures homographiques. Elles constituent par leur réunion une définition de l'homographie « qui a toute la précision mathématique désirable en ce qu'elle n'implique aucune condition superflue. »

D'abord, puisque l'homographie est une transformation isologique et que de plus toute droite y correspond à une autre droite, il s'ensuit évidemment que « quatre droites issues d'un même point dans la première figure ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre droites correspondantes de la seconde figure. »

La propriété que « quatre points en ligne droite dans une figure ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points correspondants de la seconde figure » n'est pas moins évidente. Car si l'on joint quatre points situés sur une droite transformée l à un point quelconque ω pris extérieurement à cette droite sur la première figure, on déterminera les points correspondants de la transformante L par sa rencontre avec les quatre rayons issus de Ω et correspondants à ceux qui aboutissent à ω. Or le rapport anharmonique des quatre premiers rayons est égal (à cause de l'isologie) à celui des quatre autres; donc aussi les rapports des points qu'ils déterminent respectivement sur l et L sont égaux.

6. La circonstance que toute transformation isologique

est directement isogonale en quelques points isolés du plan transformé et inversement isogonale en d'autres points, donne lieu à une propriété de l'homographie qui n'avait peut-être pas encore été remarquée. En effet, les fonctions propres à l'homographie étant les suivantes :

$$\varphi(x, y) = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + 1}, \quad \psi(x, y) = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + 1},$$

on verra aisément que la transformation est directement isogonale en un point unique et inversement en un autre point aussi unique; de là ce théorème :

Théorème. — *Dans deux figures homographiques deux couples de points particuliers se correspondent qu'on pourrait appeler « centres », qui sont caractérisés par la circonstance que deux segments correspondants pris à volonté dans les deux figures, étant vus l'un et l'autre de leurs centres respectifs, y sous-tendent deux angles égaux; mais tandis que par rapport aux centres de l'un des couples le sens de rotation des angles égaux est le même, il est contraire pour les centres du second couple.*

On peut démontrer ce théorème directement et par des considérations purement géométriques, en observant que deux figures homographiques peuvent toujours être considérées comme deux figures primitivement déduites l'une de l'autre par voie de perspective et qu'on a ensuite placées sur un même plan de manière à y occuper deux situations absolument indépendantes (Géométrie supérieure, *passim*). Il suffira donc d'établir l'existence du théorème en question par rapport à deux figures planes actuellement en perspective l'une de l'autre, ce qui est à la fois intéressant et facile.

7. X et Y étant les fonctions réelles de x et y ci-dessus

représentées par φ et ψ, soient deux variables directrices

$$z = x + iy, \quad Z = X + iY,$$

on peut dire avec Cauchy que Z est une fonction de z, puisqu'une valeur déterminée de z détermine un système unique de valeurs pour x et y, et par suite une valeur déterminée aussi pour Z. D'ailleurs en construisant la dérivée de Z, c'est-à-dire le rapport différentiel $\frac{dZ}{dz}$, on trouve pour sa valeur

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}},$$

Cette valeur est indépendante de $\frac{dy}{dx}$ lorsqu'on a à la fois

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

et alors la dérivée de Z est, comme Z elle-même, une fonction bien déterminée de z ; au lieu que si ces conditions ne sont pas remplies la dérivée de Z dépend à la fois de z et du rapport $\frac{dy}{dx}$.

Dans le premier cas, Cauchy appelle la fonction *monogène*, et dans le second il dit qu'elle est *non monogène*.

Jusqu'à ce grand géomètre, on n'avait pas eu cette idée de fonctions non monogènes; et lui-même, après avoir établi cette distinction, n'a considéré que les fonctions monogènes dans sa belle théorie des intégrales définies. Mais la relation générale ci-dessus indiquée entre Z et z, quels que soient φ et ψ, n'en est pas moins, conformément au véritable sens mathématique des mots, une relation de fonction à variable; et on voit par les lois de la

transformation des figures que les fonctions non monògènes peuvent prendre place dans la science aussi légitimement que les fonctions monogènes, puisque si les unes donnent lieu à des transformations isogonales, les autres donnent naissance à des transformations isologiques.

DÉTERMINATION DES FOYERS DANS LES CONIQUES;

PAR M. DE SAINT-GERMAIN,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

La définition la plus élémentaire des foyers consiste à les regarder comme des points dont la distance à un point quelconque de la conique s'exprime par une fonction rationnelle et linéaire de ses coordonnées. Il s'ensuit qu'on détermine les coordonnées α, β de ces points en identifiant l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta-(mx+ny+p)^2=0,$$

avec l'équation de la courbe

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Cette identification est facilitée d'une manière assez remarquable en remplaçant x par $X+\alpha$, y par $Y+\beta$. On aura alors

$$\begin{gathered}AX^2+2BXY+CY^2+Xf'_\alpha(\alpha, \beta)+Yf'_\beta(\alpha, \beta)+f(\alpha, \beta)\\ +\lambda(X^2+Y^2+2XY\cos\theta)=\lambda(mX+nY+m\alpha+n\beta+p)^2,\end{gathered}$$

ou, en posant

$$f'_\alpha = 2D_1,\quad f'_\beta = 2E_1,\quad f(\alpha, \beta) = F_1,$$
$$m\sqrt{\lambda} = m_1,\quad m\sqrt{\lambda} = n_1,\quad \sqrt{\lambda}(m\alpha+n\beta+p) = p_1:$$

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&AX^2+2BXY+CY^2+2D_1X+2E_1Y+F_1\\ &\quad+\lambda(X^2+Y^2+2XY\cos\theta)=(m_1X+n_1Y+p_1)^2.\end{aligned}\right.$$

On identifie les deux membres, ce qui donne d'abord

$$m_1 = \sqrt{A+\lambda}, \quad n_1 = \sqrt{C+\lambda}, \quad p_1 = \sqrt{F_1},$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \begin{cases} B + \lambda\cos\theta = \sqrt{A+\lambda}\,\sqrt{C+\lambda}, \\ D_1 = \sqrt{F_1}\,\sqrt{A+\lambda}, \\ E_1 = \sqrt{F_1}\,\sqrt{C+\lambda}. \end{cases}$$

L'élimination de λ se fait sans peine. Si l'on retranche la deuxième de la troisième équation après les avoir élevées au carré, on a

$$(3) \qquad E_1^2 - D_1^2 = (C - A)F_1.$$

En les multipliant, on a

$$E_1 D_1 = F_1 \sqrt{A+\lambda}\,\sqrt{C+\lambda} = (B + \lambda\cos\theta) F_1.$$

Si l'on y remplace λ par sa valeur tirée de la deuxième ou de la troisième des équations (2), on a l'une ou l'autre des équations

$$(4) \qquad \begin{cases} D_1^2 \cos\theta = (A\cos\theta - B)F_1 + E_1 D_1, \\ E_1^2 \cos\theta = (C\cos\theta - B)F_1 + E_1 D_1. \end{cases}$$

L'équation (3) et l'une des équations (4) déterminent les foyers. Elles donnent une démonstration très-simple d'une propriété bien connue des foyers. Le système des tangentes menées d'un point (α, β) à la conique est représenté par l'équation

$$\begin{aligned}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F)F_1 \\ = (D_1 x + E_1 y + D\alpha + E\beta + F)^2.\end{aligned}$$

Si l'on exprime que ce système a les caractères analytiques du cercle, on retrouve précisément les équations (3) et (4). Donc on peut dire sans difficulté que les foyers sont des points tels, que le système des tangentes menées

de ces points à la courbe ont les caractères analytiques du cercle, et plus rapidement que ce sont les centres de cercles évanouissants, bitangents à la conique.

En prenant la racine carrée du premier membre de l'équation (1), on a l'équation de la directrice, polaire du point (α, β),

$$X\sqrt{A+\lambda} + Y\sqrt{C+\lambda} + \sqrt{F_1} = 0,$$

ou, remplaçant X par $x-\alpha$, Y par $y-\beta$, $\sqrt{A+\lambda}$ par $\frac{D_1}{\sqrt{F_1}}$, $\sqrt{C+\lambda}$ par $\frac{E_1}{\sqrt{F_1}}$,

$$xD_1 + yE_1 + D\alpha + E\beta + F = 0.$$

Si les axes coordonnés sont parallèles aux axes de la courbe, les équations (3) et (4) deviennent

$$D_1^2 - E_1^2 = (A-C)F_1, \quad E_1 D_1 = 0,$$

et il est facile d'en déduire que, dans les courbes à centre, les foyers sont à l'intersection des deux axes de la courbe et d'une hyperbole équilatère ayant les mêmes axes en direction. Dans la parabole, les deux équations ne représentent que chacune une droite, il n'y a qu'un foyer à distance finie. Un système de deux parallèles n'a plus de foyers, à moins d'être confondues : alors chaque point de cette droite double est un foyer.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE;

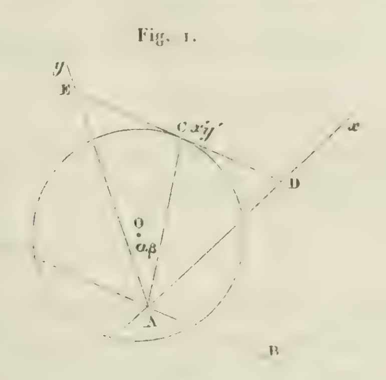
Par M. MOREL,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Répétiteur à Sainte-Barbe.

Mener entre deux droites une tangente à un cercle, de telle manière qu'elle soit partagée en deux parties égales par le point de contact.

Je prends pour axes les deux droites données. Je joins l'origine A au point de contact inconnu $C(x', y')$, et je mène la ligne AB parallèle à la tangente ED (*fig.* 1).

Fig. 1.



D'après la définition même des faisceaux harmoniques, les lignes AC et AB sont conjuguées harmoniques par rapport aux axes; leurs équations sont donc

(1) $$y - kx = 0 \quad \text{pour AC},$$

(2) $$y + kx = 0 \quad \text{pour AB}.$$

L'équation du cercle est

(3) $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta = r^2.$$

Le point (x', y') étant sur le cercle, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation de ce cercle, et aussi à l'équation (1), puisqu'il est sur la droite AC.

La droite passant par le point $O(\alpha, \beta)$ et par le point (x', y') devra être perpendiculaire à la droite ED, et, par suite, à la parallèle AB. On devra donc avoir

$$1 - k\frac{y'-\beta}{x'-\alpha} + \left(\frac{y'-\beta}{x'-\alpha} - k\right)\cos\theta = 0.$$

On en déduit pour k la valeur

$$k = \frac{x' - \alpha + (y' - \beta)\cos\theta}{y' - \beta + (x' - \alpha)\cos\theta}.$$

Portant cette valeur de k dans l'équation

$$y' - kx' = 0,$$

on trouve que le point (x', y') doit être tel, que ses coordonnées satisfassent à l'équation

$$y^2 - x^2 - y(\beta + \alpha\cos\theta) + x(\alpha + \beta\cos\theta) = 0.$$

Cette équation est celle d'une hyperbole équilatère qui passe par l'origine, par le centre du cercle, et par les projections orthogonales du centre sur les axes.

Les asymptotes sont parallèles aux droites représentées par l'équation

$$y^2 - x^2 = 0,$$

c'est-à-dire parallèles aux deux bissectrices des angles des axes.

Cherchons le centre de cette hyperbole. On a

$$f'_y = 2y - (\beta + \alpha\cos\theta) = 0,$$

$$f'_x = 2x - (\alpha + \beta\cos\theta) = 0.$$

Donc si par les milieux des segments interceptés sur chacun des axes, on mène une parallèle à l'autre, on a un diamètre, qui est conjugué de la direction du premier axe. Il en résulte que la ligne qui joint les projections du centre sur les axes est toujours un diamètre. On peut donc facilement trouver et construire cette hyperbole. Les points de rencontre de cette hyperbole avec le cercle donné détermineront le point C cherché.

Cherchons la condition pour que cette équation repré-

sente deux droites. On sait qu'une courbe dont l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey - F = 0$$

représentera deux lignes droites si l'on a entre les coefficients la relation

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = 0.$$

Nous aurons donc ici, puisque B et F sont nuls.

$$(\alpha + \beta\cos\theta)^2 - (\beta + \alpha\cos\theta)^2 = 0.$$

En développant, il vient

$$(\alpha^2 - \beta^2)\sin^2\theta = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $\alpha = \pm\beta$, c'est-à-dire si le centre du cercle est sur l'une des bissectrices des deux axes. Dans ce cas, en effet, l'équation devient, si l'on suppose d'abord $\alpha = \beta$,

$$y^2 - x^2 - (y - x)(\alpha + \alpha\cos\theta) = 0,$$

ce qui donne

$$y - x = 0 \quad \text{et} \quad y + x - \alpha(1 + \cos\theta) = 0.$$

Si $\alpha = -\beta$, on aura

$$y^2 - x^2 - (y + x)(\beta - \beta\cos\theta) = 0,$$

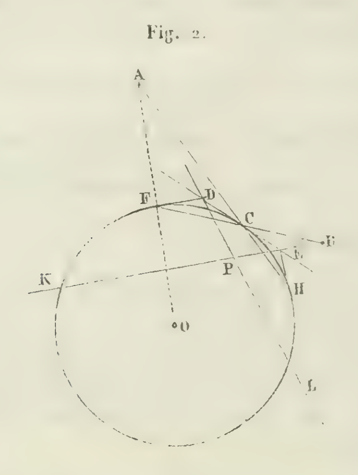
ou

$$y + x = 0, \quad y - x = \beta(1 - \cos\theta).$$

Étant donnés deux points A *et* B (*fig.* 2) *dans le plan d'un cercle* O, *trouver sur le cercle le point* C *tel, que* AC + CB *soit un minimum*. (Ce problème sert à déterminer la position du point brillant d'une sphère donnée, lorsque le point lumineux et l'œil sont aussi donnés.)

Supposons le problème résolu, je mène la tangente au point C; alors, d'après un théorème connu, l'angle ACD est égal à l'angle BCE.

Fig. 2.



Je prolonge la ligne BC jusqu'au point F, où elle rencontre la circonférence, et je mène la tangente FD; de même je prolonge la ligne AC jusqu'au point H, et je mène la tangente HE; les deux triangles isocèles DFC et CEH sont égaux, puisque l'angle ECH étant égal à l'angle DCF, la corde CH est égale à la corde CF; donc on a DC = CE.

Mais par le point D passe la polaire du point B, ligne complétement déterminée; il en est de même de EK; donc le problème revient au suivant : *mener entre deux droites données une tangente à un cercle, de telle manière qu'elle soit partagée en deux parties égales par le point de contact.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 905

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 46);

Par M. VALABREGUE,
Élève à Sainte-Barbe.

On donne une ellipse et ses deux foyers F *et* G (*); *deux droites touchent cette ellipse aux points* M *et* N *et se coupent en* T : *démontrer la relation*

$$\frac{\overline{TF}^2}{MF.NF} = \frac{\overline{TG}^2}{MG.NG}.$$

(Laguerre.)

D'après un théorème connu, on a les relations

$$MFT = TFN, \quad MGT = TGN, \quad MTF = NTG;$$

or on a

$$\frac{TF}{MF} = \frac{\sin TMF}{\sin MTF},$$

$$\frac{TF}{NF} = \frac{\sin TNF}{\sin FTN};$$

donc

$$\frac{\overline{TF}^2}{MF \times NF} = \frac{\sin TMF \times \sin TNF}{\sin MTF \times \sin FTN}.$$

Pour avoir le rapport $\frac{\overline{TG}^2}{MG \times NG}$, il me suffirait de chan-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure

ger TMF en π — TMF, et TNF en π — TNF, ce qui ne changerait pas les sinus; donc....

C. Q. F. D.

Note. — Ont résolu la même question : MM. A. G., étudiant en médecine; Thomas de Margam, Taibach; Henri Lez, à Lorrez; Willière; Alfred Giard; Maurice Aourt, élève au collége de Blaye; Louis Coquet, maître répetiteur au lycée de Bordeaux; Brocard, lieutenant du Génie; Paul Endrès, élève au lycée de Douai; Chadu, maître répétiteur au lycée de Bordeaux; Jannsen; Morel, répétiteur à Sainte-Barbe.

Question 914.

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 48).

PAR M. MOREL,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Répétiteur à Sainte-Barbe.

La formule $ax + b$, où a et b sont premiers entre eux, ne renferme que des nombres premiers à m, si tous les diviseurs premiers de m divisent a. Mais, si m a des diviseurs premiers p, q, r,..., qui ne divisent pas a, sur m nombres consécutifs compris dans $ax + b$, en posant

$$x = \alpha,\quad \alpha + 1, \ldots,\quad \alpha + m - 1,$$

il y aura

$$m\left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{q-1}{q}\right)\left(\frac{r-1}{r}\right)\cdots$$

nombres premiers à m. (LE BESGUE.)

La première partie de ce théorème est évidente, puisque si $ax + b$ et m admettaient un facteur premier commun, ce facteur premier, divisant a et $ax + b$, devrait diviser b, ce qui est contre l'hypothèse.

Pour démontrer la seconde partie, je vais d'abord établir le lemme suivant :

Si l'on a p nombres en progression arithmétique dont la raison r est première avec p, il y a un de ces nombres, et un seul, qui est divisible par p.

Pour démontrer ce lemme, on démontre que deux restes ne peuvent pas être égaux, puisque si l'on avait

$$a + nr = mp + \alpha, \quad a + n'r = mp + \alpha,$$

on aurait

$$(n - n')\, r = mp,$$

où r et p ne seraient pas premiers entre eux, ce qui est contre l'hypothèse. On a donc p restes différents inférieurs à p; donc l'un d'eux est nécessairement o.

Cela posé, on voit que l'expression $ax + b$ peut être considérée comme un terme d'une progression arithmétique dont la raison est a. Comme j'ai m termes consécutifs de cette progression, je puis les séparer en $\frac{m}{p}$ groupes de p termes; dans chacun de ces groupes, il y aura un terme divisible par p; il y aura donc $\frac{m}{p}$ termes divisibles par p, et par conséquent $\frac{m}{p}(p - 1)$ qui ne seront pas divisibles par p, et qui, par suite de la première partie, seront premiers avec m, si p est le seul facteur de m qui ne divise pas a.

Si l'on suppose deux facteurs p et q ne divisant pas a, le nombre des termes divisibles par q sera $\frac{m}{q}$; sur ce nombre, il faut prendre ceux qui sont divisibles aussi par p, dont le nombre est $\frac{m}{pq}$; il reste donc, dans les $\frac{m}{p}(p - 1)$ nombres restants, $\frac{m}{pq}(p - 1)$ nombres divisibles par q, et par suite il y en a $m\frac{p - 1}{p}\,\frac{q - 1}{q}$ qui

ne sont divisibles ni par p ni par q, et sont dès lors premiers avec m. C. Q. F. D.

On continuerait de même le raisonnement pour un plus grand nombre de facteurs.

Note. — Nous avons reçu trop tard pour l'insérer une autre solution très-simple de M. Netto, étudiant en mathématiques, à Berlin.

QUESTIONS.

933. Trouver le lieu du centre d'une ellipse de grandeur constante dont le périmètre passe par un point fixe, et dont l'axe focal passe par un autre point fixe.

Discuter la forme du lieu lorsque la distance des points fixes varie de zéro à l'infini.

Ce lieu peut être obtenu en projetant sur les tangentes d'une ellipse auxiliaire le point fixe par lequel passe l'axe focal de l'ellipse mobile. (J.-Ch. Dupain.)

934. Les centres de courbure d'une spirale d'Archimède qui correspondent à des points situés sur un même rayon vecteur appartiennent à une même ellipse.

(G. Fouret.)

935. Étant données sur un plan deux figures composées : l'une du point O et des droites A et B ; l'autre du point O′ et des droites A′ et B′, mener par chacun des points donnés une transversale telle, que les segments compris sur l'une entre le point O et les droites A et B soient égaux aux segments compris sur l'autre entre le point O′ et les droites A′ et B′.

Même problème en remplaçant dans chaque figure les droites par des circonférences passant par le point donné.

(G. Fouret.)

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'HYDROSTATIQUE;

Par M. J. MOUTIER.

1. *Définitions.* — Soit un liquide contenu dans un vase fermé par un piston mobile ; si l'on exerce normalement un effort déterminé sur la base du piston, le piston se fixe dans une position d'équilibre. La force appliquée normalement à la base du piston sera, par définition, la pression exercée sur le liquide en équilibre par le piston ; la pression du liquide sur la base du piston sera, également par définition, une force égale et contraire à la première (*).

Une paroi plane quelconque S appartenant au vase peut être assimilée à la base du piston mobile et supporte une pression P, qui, par définition, est normale à cette surface. Une force égale et contraire à P représente l'effort qu'il faudrait exercer normalement sur la surface S pour maintenir en équilibre cette paroi supposée libre.

On ne sait *à priori* comment cette pression P est répartie sur la surface S. Si cette pression était répartie uniformément sur la surface S, la pression sur l'unité de

(*) On dit quelquefois que si la pression exercée par un liquide en équilibre sur une paroi n'était pas normale à la paroi, elle pourrait se décomposer en deux autres, l'une normale, l'autre tangente à la paroi, et que cette dernière composante aurait pour effet de déplacer les molécules liquides. Quelle que soit la forme du raisonnement employé, on ne peut démontrer que la pression est normale à la paroi, qu'après avoir défini préalablement la pression exercée par un liquide en équilibre. La notion de pression s'acquiert, il est vrai, très-facilement, mais une définition précise de la pression n'en est pas moins indispensable, lorsqu'on se propose d'établir des théorèmes sur les pressions. La définition adoptée ici est indépendante de toute hypothèse sur la constitution des fluides.

surface serait $\frac{P}{S}$; quelle que soit la distribution de la pression P sur la surface S, $\frac{P}{S}$ est la pression supportée en moyenne par l'unité de surface, et s'appellera la pression moyenne sur l'unité de surface de la paroi S, ou, d'une manière abrégée, la pression moyenne sur la paroi S.

Si l'on conçoit que l'aire de la paroi S diminue indéfiniment autour d'un point M, la pression moyenne tend vers une certaine limite, que nous appellerons la pression sur l'unité de surface au point M, ou, plus simplement, la pression au point M. Un point ne peut supporter de pression ; mais on peut concevoir un élément géométrique superficiel ω autour du point M, cet élément supporte une pression p que l'on peut appeler la pression élémentaire, et on peut écrire indistinctement pour la pression au point M : Lim $\left(\frac{P}{S}\right)$ ou $\frac{p}{\omega}$. Par abréviation, nous représenterons également la pression en un point par ϖ et nous écrirons indistinctement

$$\text{Lim}\left(\frac{P}{S}\right) = \frac{p}{\omega} = \varpi.$$

La définition précédente s'étend à un point pris sur une paroi courbe ; l'élément ω appartient alors au plan tangent à la paroi au point considéré.

La même définition s'étend également aux points pris à l'intérieur du liquide ; il suffit d'imaginer une surface passant par le point pris à l'intérieur du liquide, le partageant en deux parties, et de considérer le point en question comme appartenant à cette paroi.

2. Le but principal de l'hydrostatique est de déterminer les relations qui existent entre les pressions aux

divers points de la paroi ou de l'intérieur du liquide, et les forces qui agissent sur le liquide; nous considérerons d'abord les liquides soumis uniquement à l'action de la pesanteur.

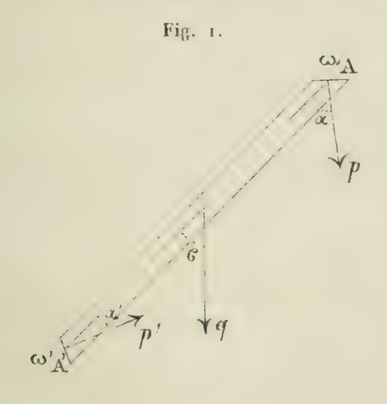
La théorie de l'équilibre des liquides pesants peut se déduire tout entière d'une remarque fort ancienne, qui sert à établir dans tous les Traités de Physique le principe d'Archimède :

Si l'on considère une portion quelconque du liquide en équilibre, les pressions exercées par le liquide environnant sur les divers éléments de la surface qui limite cette masse liquide font équilibre au poids du liquide.

On peut déduire de là tous les principes de l'hydrostatique, en choisissant convenablement la forme de la masse liquide en équilibre.

3. Imaginons un filet cylindrique, c'est-à-dire un cylindre dont les dimensions transversales soient infiniment petites par rapport aux dimensions longitudinales.

Fig. 1.



et supposons ce cylindre limité par deux plans inclinés d'une manière quelconque par rapport aux génératrices. Soient ω, ω' les deux bases du filet cylindrique (*fig.* 1);

p, p' les pressions qu'elles supportent de la part du liquide environnant, et q le poids du liquide renfermé à l'intérieur du filet.

Les pressions exercées par le liquide environnant sur les bases ω, ω' et sur les divers éléments de la surface latérale du cylindre font équilibre au poids du liquide. D'après un théorème de mécanique bien connu, la somme algébrique des projections des forces de ce système en équilibre sur une direction quelconque est nulle; or, si l'on prend pour direction celle des génératrices du cylindre, toutes les pressions élémentaires relatives à la surface latérale du cylindre ont des projections nulles sur cette direction, la somme algébrique des projections des trois forces p, p', q sur cette direction est donc nulle. Par suite, si l'on appelle α, α', β, les angles aigus formés par ces trois forces avec une direction parallèle aux génératrices du cylindre, on a, en tenant compte de la direction des forces,

$$p\cos\alpha + q\cos\beta - p'\cos\alpha' = 0.$$

Le volume du filet cylindrique est égal au volume d'un cylindre ayant pour base la section droite σ du filet et pour hauteur la ligne qui joint les centres de gravité A, A' des deux bases, et qui est parallèle aux génératrices du cylindre. Si l'on désigne par d le poids de l'unité de volume du liquide supposé homogène,

$$q = \sigma l d.$$

D'ailleurs la section droite σ du filet peut être considérée comme la projection de l'une ou l'autre des bases ω, ω', et, d'après une propriété géométrique bien connue,

$$\sigma = \omega\cos\alpha, \quad \sigma = \omega'\cos\alpha'.$$

Si l'on reporte dans la première équation les valeurs

de q, $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, on obtient, après réduction évidente,

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + l\cos\theta . d.$$

Or $l\cos\theta$ est la différence de niveau des points A, A'; en la désignant par z, il vient définitivement

$$(1) \qquad \frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + zd,$$

ou encore, en posant $\frac{p'}{\omega'} = \varpi'$, $\frac{p}{\omega} = \varpi$,

$$\varpi' = \varpi + zd.$$

4. Plusieurs conséquences se déduisent de cette relation :

1° Le rapport $\frac{p'}{\omega'} = \varpi'$ est indépendant de la direction de l'élément ω'; par suite, la pression au point A' est indépendante de l'orientation de l'élément ω'. Ainsi, en général, la pression en un point pris à l'intérieur du liquide en équilibre est indépendante de l'orientation de l'élément que l'on suppose mené par ce point; en d'autres termes, la pression supportée par un élément de surface pris à l'intérieur d'un liquide en équilibre est indépendante de l'orientation de cet élément.

2° La différence des pressions en deux points pris à l'intérieur d'un liquide est égale au poids d'une colonne liquide, ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la différence de niveau des deux points.

3° La pression est la même en deux points d'un même plan horizontal.

4° Si l'on appelle surface de niveau le lieu géométrique des points où la pression est la même, dans un liquide pesant en équilibre, les surfaces de niveau sont des plans

horizontaux. En effet, pour deux points d'une même surface de niveau on a par définition $\varpi' = \varpi$; d'après la relation (1), la différence de niveau z des deux points doit être nulle.

Ces diverses conséquences de la relation (1) peuvent s'énoncer de plusieurs autres manières. Supposons par exemple les deux éléments ω, ω' égaux entre eux,

$$p' = p + \omega z d.$$

On voit que la différence des pressions supportées par deux éléments égaux menés à l'intérieur du liquide est égale au poids d'une colonne liquide ayant pour base l'un des éléments et pour hauteur la différence de niveau des deux éléments, et par suite deux éléments égaux pris sur un même plan horizontal supportent des pressions égales.

5. La relation (1) peut s'étendre aisément au cas où la ligne AA', qui joint deux points quelconques, n'est pas située entièrement à l'intérieur du liquide. Dans ce cas, on peut toujours aller du point A au point A', en suivant une ligne brisée entièrement située à l'intérieur du liquide; il suffit alors d'écrire la relation (1) pour les sommets successifs de ce contour polygonal pour généraliser cette relation.

6. Une relation analogue s'applique à deux parois planes finies situées d'une manière quelconque dans le liquide.

Considérons en effet une paroi plane S et sur cette paroi un élément superficiel ω supportant la pression p; imaginons un plan horizontal arbitraire xy mené à l'intérieur du liquide, et appelons ϖ la pression en un point de ce plan, z la distance de l'élément ω au plan xy.

D'après la relation (1)

$$\frac{p}{\omega} = \varpi + zd,$$

ou

$$p = \varpi\omega + \omega zd.$$

Les pressions élémentaires p ont une résultante P égale à leur somme :

$$P = \varpi S + d\Sigma\omega z.$$

Or, si l'on appelle Z la distance du centre de gravité de la surface S au plan xy, on sait que

$$\Sigma\omega z = SZ,$$

et par suite

$$P = \varpi S + dSZ,$$

ou

$$\frac{P}{S} = \varpi + Zd.$$

Si l'on appelle P' la pression supportée par une seconde paroi plane d'étendue S', dont le centre de gravité soit à une distance Z' du plan xy, on a de même

$$\frac{P'}{S'} = \varpi + Z'd,$$

et, en éliminant ϖ entre ces deux relations,

$$(2) \qquad \frac{P'}{S'} = \frac{P}{S} + d(Z' - Z).$$

Cette relation a la même forme que la première et conduit, par conséquent, à des conséquences analogues ; la pression en un point est remplacée ici par la pression moyenne sur l'unité de surface.

7. Si l'on suppose les centres de gravité des deux parois planes situés sur un même plan horizontal, ou si

l'on néglige la différence de pression due à la différence de niveau $Z - Z'$, la relation (2) se réduit à

$$\frac{P'}{S'} = \frac{P}{S}.$$

Les pressions exercées par le liquide sont proportionnelles aux surfaces; c'est le principe de Pascal, ou de la transmission des pressions.

Pascal l'énonce ainsi, au commencement du second chapitre du *Traité de l'équilibre des liqueurs*: « Si un vaisseau plein d'eau, clos de toutes parts, a deux ouvertures, l'une centuple de l'autre; en mettant à chacune un piston qui lui soit juste, un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes qui pousseront celui qui est cent fois plus large et en surmontera quatre-vingt-dix-neuf.

» Et, quelque proportion qu'aient ces ouvertures, si les forces qu'on mettra sur les pistons sont comme les ouvertures, elles seront en équilibre. D'où il paraît qu'un vaisseau plein d'eau est un nouveau principe de mécanique et une machine nouvelle pour multiplier les forces à tel degré que l'on voudra.... »

La mesure directe des forces P, P' ne peut être réalisée expérimentalement à cause des frottements considérables des pistons contre les parois des tuyaux; aussi Pascal fait-il suivre de trois démonstrations théoriques l'énoncé du principe qui lui sert à expliquer les propriétés des liquides en équilibre.

« Et l'on doit admirer qu'il se rencontre en cette machine nouvelle cet ordre constant qui se trouve en toutes les anciennes, savoir: le levier, le tour, la vis sans fin, et qui est, que le chemin est augmenté en même proportion que la force... » A l'exemple de Galilée, Pascal applique ici le principe des vitesses virtuelles, sur lequel Lagrange

a établi plus tard l'hydrostatique tout entière. Pascal donne ensuite une seconde démonstration : « On peut encore ajouter, pour plus grand éclaircissement,... » et bientôt une troisième : « Voici encore une preuve qui ne peut être entendue que par les seuls géomètres..... »

On voit, d'après ce qui précède, que le principe de Pascal peut également se déduire des considérations simples sur lesquelles on s'appuie ordinairement pour établir le principe d'Archimède. Les raisonnements précédents s'appliquent à la fois aux liquides et aux gaz en équilibre; les liquides peuvent être terminés par une surface libre.

8. *Surface libre d'un liquide pesant.* — Si le vide est fait au-dessus du liquide, la pression est nulle en tous les points de sa surface; si le liquide supporte la pression constante de l'atmosphère, la pression est supposée la même en tous les points de la surface libre, et dans ces deux cas la surface libre est une surface de niveau, et, par suite, elle est horizontale (n° 4). Cette propriété étant indépendante, comme tout ce qui précède, de la forme des vases, il n'y a pas lieu de distinguer le cas où un même liquide serait contenu dans les vases qu'on appelle *vases communiquants*.

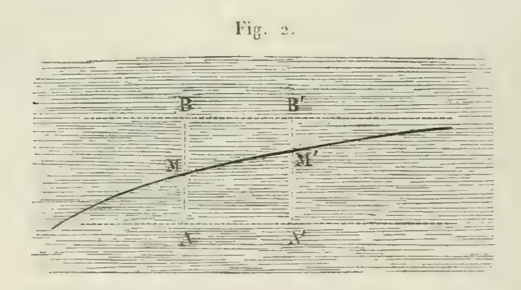
D'une manière plus générale, lorsqu'un liquide et un gaz sont superposés, la surface de séparation, comme on va le voir, est horizontale.

9. *Liquides superposés.* — Lorsque deux liquides de densité différente se superposent sans se mélanger ou réagir chimiquement l'un sur l'autre, la surface de séparation des deux liquides est un plan horizontal.

Soient MM' (*fig.* 2) la surface de séparation des deux liquides, AA' un plan horizontal mené à l'intérieur du liquide inférieur, BB' un second plan horizontal mené dans

le liquide supérieur à une distance h du premier. Prenons deux points A, A′ sur le premier plan; élevons en ces deux points des perpendiculaires jusqu'à leur rencontre avec le second plan BB′; appelons z, z' les distances AM,

Fig. 2.



A′M′; d, d' les poids de l'unité de volume des deux liquides inférieur et supérieur; ϖ, ϖ' les pressions aux points A, A′; φ, φ' les pressions aux points B, B′; d'après ce qui précède,

$$\varpi = \varphi + zd + (h - z)d',$$
$$\varpi' = \varphi' + z'd + (h - z')d'.$$

Mais les points A, A′ étant pris à l'intérieur du même liquide, $\varpi = \varpi'$; par la même raison, $\varphi = \varphi'$, en retranchant les deux équations

$$(z - z')(d' - d) = 0.$$

Par hypothèse, d est différent de d'; donc $z = z'$. Le même raisonnement s'applique à un liquide et à un gaz superposés.

10. *Pression sur une paroi plane.* — Si l'on suppose dans la relation (2) $P' = 0$, $Z' = 0$, on obtient immédiatement $P = SdZ$ pour la valeur de la pression exercée par un liquide à surface libre sur une paroi plane.

Les pressions exercées par un liquide sur les divers éléments d'une paroi courbe n'étant pas parallèles n'ont pas nécessairement une résultante unique; mais, dans certains cas, on peut trouver d'une manière simple la résultante de ces pressions élémentaires.

Prenons comme exemple les hémisphères de Magdebourg, et cherchons l'effort nécessaire pour séparer l'un des hémisphères après que le vide a été fait intérieurement, ce qui revient à chercher la résultante des pressions exercées par l'air sur une surface hémisphérique. A cet effet, imaginons une masse d'air atmosphérique contenue dans une demi-sphère; les pressions élémentaires p, p', p'',... exercées sur la surface courbe et la pression P exercée sur la base par l'air environnant font équilibre au poids de l'air atmosphérique contenu à l'intérieur. Par suite, si l'on néglige le poids de cet air, on voit que les pressions p, p', p'',... ont une résultante égale et contraire à P; l'effort nécessaire pour détacher l'hémisphère est donc égal à la pression exercée par l'atmosphère sur la base de l'hémisphère, si l'on néglige le poids de l'air dont l'hémisphère tient la place.

11. *Résultante des pressions exercées par un liquide sur les parois d'un vase.* — Un raisonnement analogue montre d'une manière immédiate que les pressions exercées par un liquide sur les parois d'un vase ont pour résultante le poids du liquide.

Si l'on considère une portion quelconque d'un liquide en équilibre, les pressions p, p', p'',... exercées par le liquide environnant sur les divers éléments de la surface qui limite la masse liquide font équilibre au poids du liquide; d'ailleurs les pressions p_0, p_1, p_2,... exercées par le liquide intérieur sur cette même surface sont respectivement égales et opposées aux forces p, p', p'',...;

donc les forces p_0, p_1, $p_2, \ldots$ forment un système équivalent au poids du liquide.

12. *Tourniquet hydraulique.* — Les pressions p_0, p_1, $p_2, \ldots$ exercées par le liquide contenu dans un vase ont pour résultante le poids q du liquide contenu dans le vase, et, par suite, font équilibre à une force q' égale et contraire à q. Par suite, la force q' et les pressions élémentaires p_1, $p_2, \ldots$, considérées à l'exclusion de p_0, ont une résultante p égale et directement opposée à p_0; si l'on ouvre un orifice en enlevant la portion de paroi qui supporte la pression p_0, et si l'on admet, en outre, que toutes les autres forces du système restent les mêmes, la force p, égale et contraire à p_0, met le vase en mouvement.

13. Nous avons considéré jusqu'à présent les liquides soumis uniquement à l'action de la pesanteur : il est aisé de voir que les résultats sont analogues, si l'on suppose un liquide soumis à des forces de direction constante et proportionnelles aux masses sur lesquelles ces forces agissent.

Reprenons en effet le filet cylindrique AA′ (n° 3); soit r la résultante des forces appliquées au liquide contenu dans le cylindre, cette force est appliquée au centre de gravité du filet et a pour expression $\sigma l \rho$, si l'on appelle ρ la force appliquée à l'unité de volume. En conservant les autres notations, on a, comme précédemment,

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + l\cos\theta . \rho ;$$

mais $l\cos\theta$ est la projection de la longueur l sur la direction des forces supposée constante : si l'on représente cette projection par λ, la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + \lambda\rho .$$

Elle donne lieu aux mêmes remarques que la relation (1); en particulier, si l'on appelle toujours *surface de niveau* le lieu géométrique des points où la pression $\frac{p'}{\omega}$ est la même, on voit que la surface de niveau passant par le point A′ est le lieu géométrique des points pour lesquels $\lambda =$ const., c'est-à-dire un plan perpendiculaire à la direction commune des forces r.

14. Si les forces qui agissent sur le liquide ont des directions différentes, mais variant d'une manière continue, on peut considérer une masse liquide suffisamment petite pour que les forces appliquées aux divers éléments de volume conservent sensiblement la même direction, et remplacer dans une petite étendue la surface de niveau par le plan tangent à cette surface. D'après ce qui précède, le plan tangent est perpendiculaire à la direction des forces au point considéré; en d'autres termes, la surface de niveau est normale en chacun de ses points à la résultante des forces qui sollicitent le liquide.

NOTE SUR UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION DES SURFACES;

PAR M. E. HABICH.

Si les normales aux points correspondants M et M′ des surfaces (A) et (A′) se rencontrent en un même point N, les normales aux sections planes de ces surfaces faites suivant la droite MM′ vont se rencontrer aux points n qui se trouvent tous dans un même plan perpendiculaire à MM′ et passant par le point N.

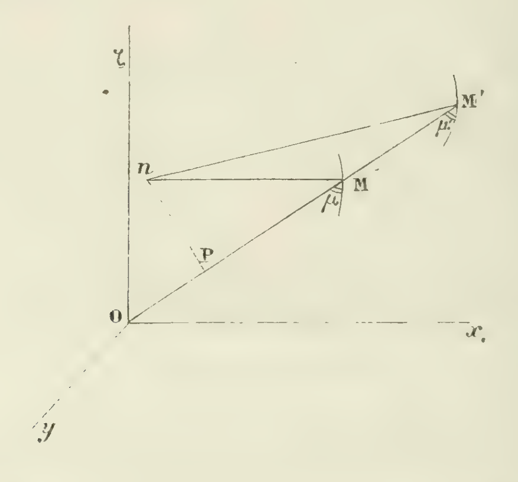
Réciproquement, si dans deux sections planes faites

suivant MM′ les normales aux courbes planes de ces sections se rencontrent aux points n et n' situés sur un même plan perpendiculaire à MM′, dans ce cas les normales aux surfaces (A) et (A′) vont se rencontrer aussi en un point N, situé dans ce dernier plan, et ayant pour projections sur les plans des sections les points n et n'.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1(r, \theta, \varphi) = 0, \\ F_2(r', \theta, \varphi) = 0, \end{cases}$$

les équations d'une surface (A) et de sa transformée (A′), dont les points correspondants se trouvent sur une même droite passant par un point fixe O, que nous avons pris pour pôle des coordonnées.



Soient (a) et (a') les courbes des sections planes faites dans les surfaces (A) et (A′), par un plan passant par le rayon vecteur OMM′; en appelant μ et μ' les angles formés par les courbes (a) et (a') avec le rayon vecteur, et p la distance OP du pôle O au pied P de la perpendiculaire nP abaissée sur ce rayon vecteur du point de

concours des normales en M et M′ aux courbes planes (a) et (a'), on trouve

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{OM}'-\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}-\mathrm{OP}}=\frac{r'-p}{r-p}=\frac{\operatorname{tang}\mu'}{\operatorname{tang}\mu}=\frac{r'}{r}\frac{dr}{dr'}.$$

Cette relation (2) nous fait voir que, lorsque le rapport $\frac{dr}{dr'}$ reste le même pour deux sections planes faites suivant le rayon vecteur OMM′, $\mathrm{OP}=p$ ne varie pas dans ces sections, et la condition pour que les points n soient dans un même plan perpendiculaire à MM′ se trouve remplie.

Les courbes (a) et (a') des sections planes faites suivant OMM′ sont déterminées par les équations (1), conjointement avec celle du plan passant par le pôle O,

$$(3) \qquad (m\cos\varphi + n\sin\varphi)\operatorname{tang}\theta = \pm 1.$$

La condition de passer par le rayon vecteur déterminé OMM′ réduit les deux paramètres arbitraires m et n à un seul ; et le rapport de θ et de φ varie avec ce paramètre, c'est-à-dire avec le déplacement du plan de la section autour du rayon vecteur OMM′.

Le rapport $\frac{dr}{dr'}$, déduit des équations (1) et (3), dépend de r, r', φ, θ, $\frac{d\varphi}{d\theta}$, et par suite du paramètre variable de l'équation (3).

Pour que ce rapport $\frac{dr}{dr'}$ reste invariable pour toutes les sections, il faut qu'il soit indépendant du paramètre arbitraire de l'équation (3), ce qui aura lieu si son expression ne contient pas ni θ, ni φ, ni $\frac{d\varphi}{d\theta}$, et soit uniquement fonction de r et r' ; d'où l'on conclut que *la transformation la plus générale, dans le cas considéré, est*

déterminée par une relation quelconque entre les rayons vecteurs correspondants r et r',

$$(4)\qquad f(r, r') = 0.$$

Citons comme application particulière la transformation par rayons vecteurs réciproques, où l'on a

$$rr' = \text{const.}, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{1}{2}(r + r'),$$

et par suite, etc.; et la transformation définie par

$$r' - r = \text{const.} = \pm m, \quad \text{d'où} \quad p = 0,$$

ce qui conduit à l'énoncé suivant :

Si sur les rayons vecteurs émanant d'un pôle O, *on porte, à partir d'une surface donnée* (A), *une longueur constante* m; *on formera une autre surface donnée* (A') *qui est la conchoïde de* (A) *par rapport au pôle* O; *et les deux surfaces jouissent de la propriété que leurs normales aux points correspondants* M *et* M' *se rencontrent en un même point* N *du plan, passant par le pôle* O *et perpendiculaire au rayon vecteur* OMM'.

Avant d'aller plus loin, remarquons qu'en ajoutant aux deux équations (1) une troisième équation entre φ et θ.

$$(5)\qquad F_3(\varphi, \theta) = 0,$$

qui exprime en général une surface unique ayant son sommet en O [et en particulier un plan (3)], les relations (1) et (5) détermineront deux courbes, intersections communes des surfaces (1) avec le cône (5).

En éliminant φ et θ entre ces équations (1) et (5) on obtiendra une relation de la forme (4), ce qui montre que, étant données deux courbes situées sur une même surface conique (ou un plan) ayant son sommet au pôle de

transformation, il est possible en général de passer d'une de ces courbes à l'autre au moyen de la transformation de la forme (4).

Si l'on a seulement les deux équations (1), pour arriver à la relation (4), il faut qu'on puisse éliminer de ces deux équations *à la fois* les deux variables indépendantes φ et θ, ce qui demande que les équations (1) affectent une forme particulière.

Proposons-nous maintenant de déterminer la forme de la fonction (4), de telle manière, que les lignes de courbure des surfaces (A) et (A′) soient des courbes correspondantes.

Cette question a été traitée d'une *manière générale* par M. Liouville. L'illustre géomètre, en s'appuyant sur les parties les plus élevées de la géométrie analytique, a démontré que la transformation par rayons vecteurs réciproques et l'homothétie jouissent seules de la propriété de conserver les angles des éléments correspondants linéaires et superficiels des figures transformées, et par conséquent de la propriété que nous avons énoncée (*).

Je me propose de démontrer ici, par des procédés élémentaires, que, *dans les transformations définies par la relation* (4), *l'homothétie et l'inversion jouissent seules de la propriété de faire correspondre les lignes de courbure de deux surfaces transformées.*

Pour cela je commencerai par établir que ces deux modes de transformation appliqués aux courbes planes jouissent seuls de la propriété : « Que les centres de courbure des lignes transformées se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation. »

(*) Dans un article inséré dans le Cahier XLII (1867) du *Journal de l'École Polytechnique*, M. Haton de la Goupillière a démontré ces propriétés en se basant sur les principaux théorèmes de la théorie des surfaces orthogonales.

Considérons en effet deux cercles de rayons R et R', dont les centres K et K' se trouvent sur une même droite passant par le pôle O et à des distances $OK = d$ et $OK' = d'$ de ce pôle; les équations de ces cercles seront

$$R^2 = r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta,$$
$$R'^2 = r'^2 + d'^2 + 2r'd'\cos\theta.$$

Éliminant entre ces deux équations $\cos\theta$ pour arriver à la relation (4), on obtient, réduction faite,

$$(6) \qquad (rr' - dd')(rd' - dr') + R'^2 dr - R^2 d'r' = 0,$$

d'où l'on reconnaît que, pour transformer deux cercles de manière que leurs centres se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation, et cela *indépendamment* de la grandeur de leurs rayons R et R', il faut satisfaire à l'équation (6) dans laquelle on aurait supposé $R = 0$ et $R' = 0$, ce qui donne

$$rr' = dd' \quad \text{et} \quad \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'},$$

c'est-à-dire que les deux cercles doivent être semblables ou réciproques par rapport au pôle de transformation.

Considérons maintenant deux courbes quelconques, et remplaçons-les aux points M et M' par leurs cercles osculateurs; pour que les centres de ces cercles se trouvent sur une même droite passant par le pôle, indépendamment de la grandeur de leurs rayons, c'est-à-dire indépendamment de la forme particulière que peuvent affecter les courbes données, il faut que la transformation soit l'une des deux citées plus haut; donc, etc.

Ces préliminaires établis, revenons à la question.

Supposons que les surfaces (A) et (A') sont effectivement telles, que leurs lignes de courbure se correspondent. Soient M et M_1 deux points infiniment voisins de la

ligne de courbure de la surface (A), et M' et M'_1 leurs correspondants sur la surface (A').

Menons par les rayons vecteurs OMM', $OM_1M'_1$ et les normales correspondantes aux surfaces deux plans : d'après l'hypothèse ces plans vont se rencontrer suivant la droite qui réunit les centres de courbure K et K' des sections principales MM_1 et $M'M'_1$, et qui passe par le pôle de transformation O. Il suit de là que, lorsque les lignes de courbure se correspondent, les centres de courbure des sections principales se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation.

Maintenant, comme la relation (4) est indépendante de la section plane faite suivant le rayon vecteur, elle est la même pour toutes ces sections, et, par suite, pour la connaître, il suffit de la déterminer pour une seule section.

Pour y arriver, faisons passer un plan par le rayon vecteur OMM' et les tangentes aux lignes de courbure, correspondantes aux points M et M'; ce plan coupera les surfaces (A) et (A') suivant deux courbes planes dont les centres de courbure seront les projections des centres de courbure K et K' des sections principales considérées, sur leur plan osculateur commun; et comme les centres de courbure K et K' se trouvent sur une même droite passant par le pôle O, il en sera de même pour les centres de courbure de la section plane de deux surfaces. On pourrait dire la même chose de l'autre section principale.

Par conséquent, d'après ce que nous avons démontré plus haut, les centres de courbure des courbes planes se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation, dans deux cas :

Lorsque les courbes sont semblables par rapport au pôle, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\frac{r'}{r} = \text{const.};$$

Et lorsque les courbes sont réciproques, c'est-à-dire quand

$$rr' = \text{const.}$$

Donc notre théorème se trouve démontré.

AXES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ OBTENUS PAR UNE SPHÈRE CONCENTRIQUE;

Par M. HOUSEL.

I. Quoique la surface ait un centre, nous la représenterons d'abord par l'équation

$$\begin{aligned} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ & \qquad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}$$

parce que les calculs qui vont suivre s'appliqueront même aux surfaces dépourvues de centre.

L'équation d'un plan tangent à cette surface en un point qui a pour coordonnées x', y', z' sera

$$\begin{aligned} & x(Ax' + B'z' + B''y' + C) + y(A'y' + Bz' + B''x' + C') \\ & \quad + z(A''z' + By' + B''x' + C'') + Cx' + C'y' + C''z' + D = 0. \end{aligned}$$

Une sphère concentrique à la surface et de rayon R aura pour équation, en indiquant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre,

$$\begin{aligned} & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2(y - y_0)(z - z_0)\cos yz \\ & \quad + 2(x - x_0)(z - z_0)\cos xz + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos xy = R^2. \end{aligned}$$

Si le point donné est commun à la surface et à la sphère, l'équation du plan tangent à la sphère en ce point, en prenant les dérivées de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$,

comme si c'étaient les variables elles-mêmes, sera

$$
\begin{aligned}
&(x - x_0)[x' - x_0 + (z' - z_0)\cos xz + (y' - y_0)\cos xy] \\
&+ (y - y_0)[y' - y_0 + (z' - z_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xy] \\
&+ (z - z_0)[z' - z_0 + (y' - y_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos yz] = R^2.
\end{aligned}
$$

II. Si ce plan coïncide avec le plan tangent à la surface en ce même point, il est perpendiculaire au rayon central, qui devient, par conséquent, un *axe principal*.

Pour établir cette coïncidence, il faut chercher à mettre en évidence, dans l'équation du plan tangent à la surface, les facteurs $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, au lieu de x, y et z. Cette équation s'écrira donc

$$
\begin{aligned}
&(x - x_0)(\mathrm{A}x' + \mathrm{B}'z' + \mathrm{B}''y' + \mathrm{C}) \\
&+ (y - y_0)(\mathrm{A}'y' + \mathrm{B}z' + \mathrm{B}''x' + \mathrm{C}') \\
&+ (z - z_0)(\mathrm{A}''z' + \mathrm{B}y' + \mathrm{B}''x' + \mathrm{C}'') \\
&\quad + x_0(\mathrm{A}x' + \mathrm{B}'z' + \mathrm{B}''y' + \mathrm{C}) \\
&\quad + y_0(\mathrm{A}'y' + \mathrm{B}z + \mathrm{B}''x' + \mathrm{C}') \\
&\quad + z_0(\mathrm{A}''z' + \mathrm{B}y' + \mathrm{B}''x' + \mathrm{C}'') \\
&\qquad + \mathrm{C}x' + \mathrm{C}'y' + \mathrm{C}''z' + \mathrm{D} = 0.
\end{aligned}
$$

En mettant de côté les termes affectés des facteurs $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, les termes suivants se combinent de la manière que voici :

$$
\begin{aligned}
x'(\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}''y_0 + \mathrm{B}'z_0 + \mathrm{C}) &+ y'(\mathrm{A}'y_0 + \mathrm{B}''x_0 + \mathrm{B}z_0 + \mathrm{C}') \\
&+ z'(\mathrm{A}''z_0 + \mathrm{B}'x_0 + \mathrm{B}y_0 + \mathrm{C}'') = 0,
\end{aligned}
$$

puisque le point (x_0, y_0, z_0) représente le centre.

Il reste donc l'équation

$$
\begin{aligned}
&(x - x_0)(\mathrm{A}x' + \mathrm{B}'z' + \mathrm{B}''y' + \mathrm{C}) \\
&+ (y - y_0)(\mathrm{A}'y' + \mathrm{B}z' + \mathrm{B}''x' + \mathrm{C}' \\
&+ (z - z_0)(\mathrm{A}''z' + \mathrm{B}y' + \mathrm{B}''x' + \mathrm{C}'') = 0.
\end{aligned}
$$

Pour l'identifier avec celle du plan tangent à la sphère,

on posera

$$\frac{\mathrm{A}x' + \mathrm{B}'z' + \mathrm{B}''y' + \mathrm{C}}{-\mathrm{D}} = \frac{x' - x_0 + (z' - z_0)\cos xz + (y' - y_0)\cos xy}{\mathrm{R}^2},$$

$$\frac{\mathrm{A}'y' + \mathrm{B}z' + \mathrm{B}''x' + \mathrm{C}'}{-\mathrm{D}} = \frac{y' - y_0 + (z' - z_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xy}{\mathrm{R}^2},$$

$$\frac{\mathrm{A}''z' + \mathrm{B}y' + \mathrm{B}'x' + \mathrm{C}''}{-\mathrm{D}} = \frac{z' - z_0 + (y' - y_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xz}{\mathrm{R}^2}.$$

III. Ces équations se modifient si l'on pose aussi, dans les premiers membres,

$$x' = (x' - x_0) + x_0, \quad y' = (y' - y_0) + y_0, \quad z' = (z' - z_0) + z_0.$$

Alors

$$\mathrm{A}x' + \mathrm{B}'z' + \mathrm{B}''y' + \mathrm{C} = \mathrm{A}(x' - x_0) + \mathrm{B}'(z' - z_0) + \mathrm{B}''(y' - y_0),$$

puisque

$$\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}'z_0 + \mathrm{B}''y_0 + \mathrm{C} = 0.$$

Il en est de même pour les autres dérivées.

IV. Cette transformation étant supposée faite, divisons les deux termes de chaque égalité par $z' - z_0$, et indiquons par $\mu = \frac{x' - x_0}{z' - z_0}$, $\nu = \frac{y' - y_0}{z' - z_0}$ les coefficients angulaires du rayon central, les équations précédentes deviennent

$$\frac{\mathrm{A}\mu + \mathrm{B}' + \mathrm{B}''\nu}{-\mathrm{D}} = \frac{\mu + \cos xz + \nu\cos xy}{\mathrm{R}^2},$$

$$\frac{\mathrm{A}'\nu + \mathrm{B} + \mathrm{B}''\mu}{-\mathrm{D}} = \frac{\nu + \cos yz + \mu\cos xy}{\mathrm{R}^2},$$

$$\frac{\mathrm{A}'' + \mathrm{B}\nu + \mathrm{B}'\mu}{-\mathrm{D}} = \frac{1 + \nu\cos yz + \mu\cos xz}{\mathrm{R}^2}.$$

d'où l'on tire les équations

$$-\frac{D}{R^2} = \frac{A\mu + B' + B''\nu}{\mu + \cos xz + \cos xy}$$

$$= \frac{A'\nu + B + B''\mu}{\nu + \cos yz + \mu \cos xy} = \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \nu \cos yz + \mu \cos xz} = s,$$

ce qui donne μ et ν en fonction de s, et aussi l'équation en s.

Ces relations étant connues, il nous suffira de rappeler cette équation en s qui s'en déduit par élimination :

$$\begin{aligned}
& s^3(1 - \cos^2 zy - \cos^2 zx - \cos^2 xz + 2\cos zy \cos xz \cos xy) \\
& \quad - s^2 [A \sin^2 yz + A' \sin^2 xz + A'' \sin^2 xy \\
& \qquad\quad - 2B''(\cos xy - \cos xz \cos yz) \\
& \qquad\quad - 2B'(\cos xz - \cos xy \cos zy) \\
& \qquad\quad - 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz)] \\
& \quad - s[B''^2 - AA' + B'^2 - AA'' + B^2 - A'A'' \\
& \qquad\quad + 2\cos yz(AB - B'B'') \\
& \qquad\quad + 2\cos xz(A'B' - BB'') + 2\cos xy(A''B'' - BB')] \\
& \qquad\quad + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0.
\end{aligned}$$

V. *Relations entre les axes et les diamètres conjugués.* — Soient s_1, s_2, s_3 les racines de cette équation, et R_1^2, R_2^2, R_3^2 les carrés des demi-axes principaux. Comme ces demi-axes sont les rayons des sphères concentriques dont nous avons parlé, on aura

$$R_1^2 = -\frac{D}{s_1}, \quad R_2^2 = -\frac{D}{s_2}, \quad R_3^2 = -\frac{D}{s_3}.$$

Considérons, pour fixer les idées, l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

d'un ellipsoïde rapporté à un système de diamètres con-

jugués. On a alors, dans l'équation de la surface, tous les coefficients nuls, excepté $A = \frac{1}{a'^2}$, $A' = \frac{1}{b'^2}$, $A'' = \frac{1}{c'^2}$ et $D = -1$, d'où $s = \frac{1}{R^2}$. Alors l'équation en s devient, en posant

$$\varepsilon^2 = 1 - \cos^2 yz - \cos^2 xz - \cos^2 xy + 2\cos yz \cos xz \cos xy,$$

$$\frac{\varepsilon^2}{R^6} - \frac{1}{R^4}\left(\frac{\sin^2 yz}{a'^2} + \frac{\sin^2 xz}{b'^2} + \frac{\sin^2 xy}{c'^2}\right) + \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{a'^2 b'^2} + \frac{1}{a'^2 c'^2} + \frac{1}{b'^2 c'^2}\right) - \frac{1}{a'^2 b'^2 c'^2} = 0.$$

Multiplions par $R^6 a'^2 b'^2 c'^2$ et changeons les signes, il vient

$$R^6 - R^4(a'^2 + b'^2 + c'^2) + R^2(b'^2 c'^2 \sin^2 yz + a'^2 c'^2 \sin^2 xz + a'^2 b'^2 \sin^2 xy) - \varepsilon^2 a'^2 b'^2 c'^2 = 0.$$

On en conclut immédiatement les relations suivantes :

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2, \quad R_1 R_2 R_3 = \varepsilon a' b' c',$$

et

$$R_2^2 R_3^2 + R_1^2 R_3^2 + R_1^2 R_2^2 = b'^2 c'^2 \sin^2 yz + a'^2 c'^2 \sin^2 xz + a'^2 b'^2 \sin^2 xy.$$

VI. Les équations du § II se mettent sous la forme

$$\frac{A x' + B' z' + B'' y' + C}{x' - x_0 + (z' - z_0)\cos xz + (y' - y_0)\cos xy} = \frac{A' y' + B z' + B'' x' + C'}{y' - y_0 + (z' - z_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xy} = \frac{A'' z' + B y' + B' x' + C''}{z' - z_0 + (y' - y_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xz}$$

Divisant tous les dénominateurs par $z' - z_0$, il reste

$$\frac{Ax' + B'z' + B''y' + C}{\mu + \cos xz + \nu \cos xy} = \frac{A'y' + Bz' + B''x' + C'}{\nu + \cos yz + \mu \cos xy} = \frac{A''z' + By' + B'x' + C''}{1 + \nu \cos yz + \mu \cos xz}.$$

VII. *Paraboloïdes*. — Ces dernières formules s'appliquent à un paraboloïde : μ et ν sont les coefficients angulaires d'un diamètre, x', y', z' étant les coordonnées du sommet, qui est le seul point où le plan tangent soit perpendiculaire à un diamètre.

Pour déterminer le sommet d'après ces formules, voir *Nouvelles Annales*, 1861, p. 307 et suiv.

NOTE SUR LES RACINES DES NOMBRES;

PAR ÉTIENNE SANCHIS BARRACHINA (d'Alicante).

Lemme. — Le plus petit nombre entier de n chiffres étant 10^{n-1}, la différence D entre sa puissance $m^{\text{ième}}$ et celle de l'entier $10^{n-1} + 1$ est

$$D = m10^{(n-1)(m-1)} + \frac{m(m-1)}{1.2} 10^{(n-1)(m-2)} + \ldots > m10^{(n-1)(m-1)}.$$

THÉORÈME. — *Les racines $m^{\text{ièmes}}$ de tous les entiers ayant*

$$mn, \quad mn - 1, \quad mn - 2, \ldots, \quad mn - (m - 1)$$

chiffres, et dont le nombre des chiffres non identiques à droite ne surpasse pas $(n-1)(m-1)$, ne diffèrent pas d'une unité.

En effet, tous ces nombres auront n caractères à leurs

racines $m^{ièmes}$, car toute racine $m^{ième}$ renferme autant de chiffres que l'on peut former de tranches de m chiffres, (la dernière à gauche pouvant être incomplète).

Supposons que deux de ces racines diffèrent d'une unité, la différence de leurs puissances $m^{ièmes}$ serait, en vertu du lemme, supérieure à $m\,10^{(n-1)(m-1)}$, ou à m suivi de $(n-1)(m-1)$ zéros; cette différence aurait donc $(n-1)(m-1)+1$ chiffres au moins; donc les nombres proposés auraient à droite plus de $(n-1)(m-1)$ chiffres différents, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exemple. — Considérons en particulier la racine cubique des nombres. Les entiers de $3n$, $3n-1$, $3n-2$ chiffres, dans lesquels, ceux de la gauche étant identiques, le nombre des chiffres différents à droite ne surpasse pas $2n-2$, ont même racine entière.

Les racines des nombres de 11 et 9 chiffres qui ont 5 chiffres communs à gauche diffèrent d'une quantité moindre qu'une unité.

NOTE SUR UN CARACTÈRE DE CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. DOUCET,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur au lycée de Lyon.

Dans le *Traité d'Algèbre* de M. Laurent (p. 299), on trouve, sans démonstration, le théorème suivant :

La série

$$\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+2}}\ldots$$

est convergente si la quantité

$$u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n$$

est constante ou croissante

La démonstration de ce théorème est des plus simples. Posons

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = A,$$

et supposons d'abord cette quantité positive et constante. Soit d'ailleurs

$$u_1 - u_0 = h.$$

On a les égalités

$$\begin{aligned}
u_1 - u_0 &= h,\\
u_2 - u_1 &= h + A,\\
u_3 - u_2 &= h + 2A,\\
&\dots\dots\dots\\
u_n - u_{n-1} &= h + (n-1)A.\\
u_{n+1} - u_n &= h + nA,\\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

On en déduit

$$u_n = u_0 + nh + \frac{n(n-1)}{2}A,$$

$$u_{n+1} = u_0 + (n+1)h + \frac{(n+1)n}{2}A.$$

Le rapport $\dfrac{\frac{1}{u^{n+1}}}{\frac{1}{u^n}}$ d'un terme de la série au précédent a pour limite l'unité ; mais si l'on met ce rapport sous la forme $\dfrac{1}{1+\alpha}$, on trouve

$$\alpha = \frac{h + nA}{u_0 + nh + \frac{n(n-1)}{2}A},$$

de sorte que $n\alpha$ tend vers la limite 2. La série est donc convergente.

La convergence aurait lieu *à fortiori* si la quantité A

était croissante. Si l'on forme, en effet, dans cette hypothèse, une série commençant par les trois premiers termes de la précédente, il est clair qu'à partir de là la nouvelle série aura tous ses termes plus petits que ceux de même rang dans la première.

Il est à peine nécessaire d'examiner le cas où la quantité A serait constante et négative. A partir d'un certain rang, les termes de la série deviennent négatifs, et si l'on ne tient compte que de leur valeur absolue, on rentre dans le premier cas. On rentrerait dans le second si la quantité A, d'abord négative, croissait en valeur absolue.

Il ne reste qu'une place pour la divergence; c'est le cas où A, d'abord positive ou négative, s'approche de zéro indéfiniment. La convergence serait encore assurée, si la valeur absolue de A restait supérieure à une limite fixe différente de zéro.

On constate d'ailleurs facilement la divergence si $A = 0$. En effet la somme

$$\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 + h} + \frac{1}{u_0 + 2h} + \ldots$$

peut s'écrire

$$\frac{1}{u_0}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \frac{h}{u_0}} + \frac{1}{1 + \frac{2h}{u_0}} + \ldots\right);$$

et si l'on a $h < u_0$, ce qu'on peut toujours supposer, la série entre parenthèses a ses termes plus grands que ceux de la série harmonique. Elle est donc divergente.

Le caractère de convergence indiqué par M. Laurent, d'après M. Lemoine, semble être d'une utilité réelle. On peut étudier la quantité A elle-même, ou mieux sa dérivée, qui doit être, dans le cas de convergence, nulle ou positive. J'ai examiné quelques exemples de séries dont la nature

reste incertaine après l'essai des caractères indiqués ordinairement dans les éléments. Ces expériences, qui n'ont pas un degré d'intérêt suffisant pour être rapportées ici, ont réussi généralement.

MOYEN SIMPLE DE MENER LA NORMALE A L'ELLIPSE ;

Par M. Léon PAILLOTTE.

Étant donnés les deux axes a et b d'une ellipse, on la construit facilement par points.

Rappelons la construction.

Sur chacun des deux axes a et b comme diamètre, on décrit un cercle ; du centre O on trace un rayon quelconque OR qui coupe les deux cercles en M_1 et M_2 ; par le point M_1 on mène une parallèle au petit axe, par le point M_2 une parallèle au grand axe : leur point de rencontre M appartient à l'ellipse.

Cela posé, pour avoir la normale au point M, il suffit de prolonger OR jusqu'à sa rencontre en R avec le cercle décrit du point O comme centre, et $(a+b)$ comme rayon, et de joindre à M le point R.

La démonstration de ce théorème est facile.

NOTE SUR LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES ;

Par M. PARPAITE,
Élève à l'École Normale supérieure.

On sait que si une équation algébrique mise sous la forme ordinaire renferme trois termes consécutifs

$$A_{n+1}x^{n+1},\quad A_n x^n,\quad A_{n-1}x^{n-1},$$

dont les coefficients soient les termes consécutifs d'une progression géométrique, elle a au moins deux racines imaginaires. On démontre ce théorème en multipliant le premier membre de l'équation par $(x - a)$ et en profitant de l'indétermination de a pour produire des lacunes dans l'équation $f(x)(x-a) = 0$.

Cherchons si en multipliant le premier membre de l'équation par un polynôme du deuxième degré, on pourrait profiter de l'indétermination des coefficients pour amener des lacunes dans le produit résultant; quelles conditions les coefficients de l'équation doivent remplir pour cela; quelles conclusions on peut en tirer pour le nombre des racines imaginaires.

Soit l'équation donnée

$$0 = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_n x^{m-n} + A_{n+1} x^{m-n-1} + \ldots$$

multiplions par

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Trois termes consécutifs du produit seront :

$$\begin{aligned} &(A_{n+2}\alpha + A_{n+1}\beta + A_n\gamma)\, x^{m-n}, \\ &+ (A_{n+3}\alpha + A_{n+2}\beta + A_{n+1}\gamma)\, x^{m-n-1}, \\ &+ (A_{n+4}\alpha + A_{n+3}\beta + A_{n+2}\gamma)\, x^{m-n-2}. \end{aligned}$$

Ces trois termes consécutifs disparaîtront si l'on a

$$\begin{aligned} A_{n+2}\alpha + A_{n+1}\beta + A_n\gamma &= 0, \\ A_{n+3}\alpha + A_{n+2}\beta + A_{n+1}\gamma &= 0, \\ A_{n+4}\alpha + A_{n+3}\beta + A_{n+2}\gamma &= 0. \end{aligned}$$

On voit qu'il sera possible de choisir α, β, γ dans un rapport tel, que ces trois équations soient satisfaites simultanément, si l'on a

$$D, \quad \begin{vmatrix} A_n & A_{n+1} & A_{n+2} \\ A_{n+1} & A_{n+2} & A_{n+3} \\ A_{\text{[illegible]}} & A_{\text{[illegible]}} & A_{\text{[illegible]}} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, étant donnée une équation $f(x) = 0$, que l'on forme les divers déterminants D_n, si l'un au moins est nul, on peut faire disparaître trois termes consécutifs de l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$.

Cela posé, on calculera les rapports des inconnues α, β, γ; on en déduira les valeurs des coefficients de x^{m-n+1} et de x^{m-n+3}; on peut facilement les mettre sous la forme de déterminants, à un facteur près : nous ne nous y arrêterons pas.

Si les coefficients de ces puissances sont de signes contraires, l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ a au moins deux racines imaginaires; il faudra voir si les valeurs de α, β, γ rendent les racines de $\varphi(x)$ réelles ou imaginaires avant de tirer une conclusion relative à l'équation $f(x) = 0$.

Si les coefficients de ces puissances sont de même signe, on peut affirmer que l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ a quatre racines imaginaires au moins, par suite que l'équation $f(x) = 0$ en a au moins deux.

Nous nous appuyons sur ce théorème bien connu, qui découle de la règle des signes de Descartes :

Une équation a au moins $2n$ racines imaginaires :

1° *Si entre deux termes il en manque $2n$;*

2° *Si entre deux termes de signes contraires il en manque $2n+1$;*

3° *Si entre deux termes de même signe il en manque $2n-1$.*

Note du Rédacteur. — On peut évidemment étendre ces considérations au cas où $\varphi(x)$ serait du troisième, du quatrième degré, etc. On arriverait ainsi à une série de transformations qui permettraient de juger, par les lacunes produites, du nombre des racines imaginaires de l'équation.

Nous nous arrêterons à cette indication, à cause de la complication des énoncés.

La règle de M. Parpaite est d'ailleurs très-particulière et d'une application peu fréquente, car il arrivera très-rarement que cinq coefficients consécutifs satisfassent à la relation $D_n = 0$.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

Par M. MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Trouver la courbe telle, que si l'on mène une tangente quelconque terminée aux axes, cette tangente soit partagée en deux parties égales par le point de contact.

Soient $y = f(x)$ l'équation de la courbe cherchée, x, y un point de la courbe; on a, d'après l'hypothèse,

$$\frac{y}{2y_1} + \frac{x}{2x_1} = 1,$$

avec la relation

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{y_1}{x_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy_1}{y_1} = -\frac{dx_1}{x_1};$$

donc on aura, en intégrant,

$$\log y_1 = -\log x_1 + \log k = \log \frac{k}{x_1};$$

donc la courbe a pour équation

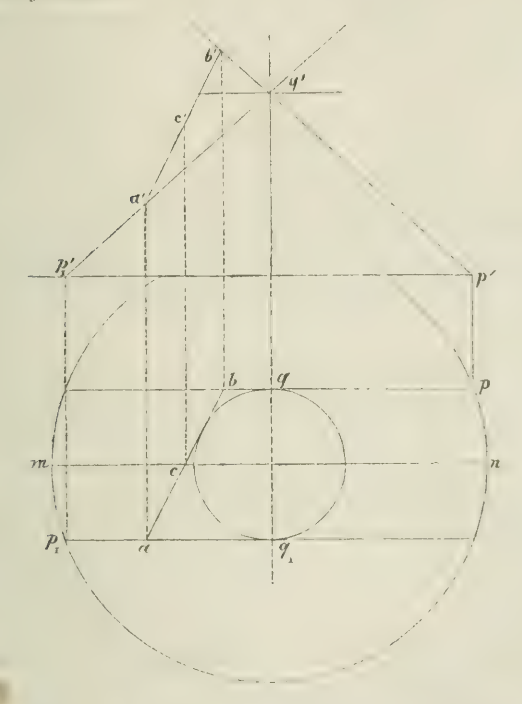
$$y = \frac{k}{x}, \quad \text{ou} \quad xy = k.$$

C'est donc une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Ce théorème préliminaire va nous servir à établir le suivant :

Démontrer géométriquement que la surface engendrée par une ligne droite qui tourne autour d'un axe vertical sans se rencontrer, est un hyperboloïde de révolution, c'est-à-dire que sa courbe méridienne est une hyperbole.

Nous supposons connues les principales propriétés de cette surface, c'est-à-dire que nous admettons que l'on sache que cette surface possède un second système de génératrices rectilignes, et que toute génératrice de l'un des systèmes rencontre deux génératrices quelconques de l'autre système.



Pour cela, je considère les deux génératrices pq, $p'q'$ et p_1q_1, p'_1q' du même système, et la génératrice acb.

$a'c'b'$ de l'autre système. Le point cc' étant un point du méridien mn, qui est parallèle au plan vertical, le plan tangent en ce point est perpendiculaire au méridien et, par suite, au plan vertical, et comme il contient la génératrice ab, $a'b'$, sa trace verticale est la ligne $a'b'$ ellemême, qui sera par suite tangente en c' à la courbe méridienne.

Les plans parallèles pq, mn, p_1q_1 étant équidistants, la droite ab, $a'b'$ qui rencontre les plans pq et p_1q_1 aux points a, a' et b, b' est partagée en deux parties égales par le plan mn; donc le point c' sera le milieu de $a'b'$; et par suite la courbe méridienne sera une hyperbole.

C. Q. F. D.

QUESTIONS.

936. En multipliant $(x^2-1)^n$ par la série

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots,$$

la partie entière du produit sera le polynôme

$$F(x) = x^{2n-1} - \left(n - \frac{1}{3}\right)x^{2n-3} + \left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{3} + \frac{1}{5}\right]x^{2n-5} - \ldots,$$

à l'égard duquel on propose de démontrer :

1° Que l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires, sauf la racine $x = 0$, quand le nombre n est pair ;

2° Qu'en supposant n impair, elle n'admet, outre la racine nulle, que deux racines réelles égales et de signes contraires, dont la valeur absolue, supérieure à l'unité, est moindre que $\sqrt{2}$ et converge vers cette limite lorsque le nombre n augmente. (HERMITE.)

937. Une ellipse roule sur une autre ellipse. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes.

(Dauplay.)

938. Deux ellipses sont situées dans le même plan, l'une est fixe et l'autre mobile autour de son centre. Dans chaque position de l'ellipse mobile, on mène les tangentes communes. On demande le lieu des points de rencontre.

Quand les ellipses sont extérieures, il y a deux tangentes extérieures et deux tangentes intérieures. Trouver le lieu des points de rencontre des premières tangentes et le lieu des points de rencontre des secondes. Examiner les cas particuliers. (Dauplay.)

939. Étant donné un contour polygonal fermé de $2n$ côtés inscrit dans une conique, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la conique sur les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées du même point sur tous les côtés de rang impair. (Chasles.)

940. Étant donnés n points sur un cercle, on peut trouver $3.4\ldots(n-1)$ contours polygonaux fermés de n côtés ayant ces points pour sommets. Si, d'un même point du cercle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de tous ces contours, le produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un contour quelconque est le même pour tous les contours. (Désiré André.)

941. Tout nombre pair est égal à un cube qui n'est pas nul plus trois carrés. (Désiré André.)

942. Un cube parfait augmenté de 7 unités d'un ordre quelconque ne peut pas être un carré parfait.

(Joffroy.)

943. Une courbe plane c roule sur une courbe fixe C, située dans le même plan, en entraînant un point mobile qui décrit alors une courbe b. A un instant donné, les deux courbes se touchent en A, et le point mobile étant en M, la courbe c s'arrête brusquement et la courbe C commence au contraire à rouler sur la première en entraînant le point M suivant une courbe B. Démontrer que les centres de courbure des deux courbes b et B, au point commun M, divisent harmoniquement la longueur MA.

(Laisant.)

944. Deux ellipses égales sont tangentes à la même droite au même point fixe, l'une par l'extrémité du grand axe, l'autre par l'extrémité du petit axe. Les deux demi-axes a et b sont liés par la relation $ab =$ const. On demande :

1° Les lieux des points d'intersection ;

2° Le lieu des milieux des tangentes communes.

945. Relations d'identité entre les angles d'un triangle rectiligne.

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$
$$= 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1),$$
$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 + 4(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$
$$+ (\cos A + \cos B + \cos C - 1)^2$$
$$= 4(\sin B \sin C + \sin A \sin C + \sin A \sin B).$$

(J.-Ch. Dupain.)

946. Soient (A) et (A′) deux surfaces dont l'une est la transformée de l'autre par rapport à un pôle O, c'est-à-dire que les points correspondants de ces surfaces se trouvent sur une même droite passant par le point fixe O. On demande de démontrer :

1° Que dans ce mode de transformation les surfaces

liées par la relation

$$f(r, r') = 0,$$

où f est une fonction quelconque des distances $OM = r$, $OM' = r'$, jouissent seules de la propriété que leurs normales aux points correspondants se rencontrent en un même point de l'espace : comme une des applications, on peut considérer les surfaces conchoïdes $r - r' = \pm$ const.;

2° Que parmi les transformations définies par la relation générale $f(r, r') = 0$, il n'y a que l'homothétie et l'inversion qui jouissent de la propriété de faire correspondre les lignes de courbure des surfaces transformées.

(E. Habich.)

947. Étant donnée la série

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots,$$

convergente pour une valeur finie quelconque réelle ou imaginaire de z, on pose l'équation

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots = A,$$

A étant un nombre donné. Démontrer que la différence entre deux racines quelconques z_1 et z_2 de cette équation est supérieure à une quantité fixe qui dépend de A et des coefficients $C_0, C_1, C_2, \ldots$.

(Fr. Piccioli, de Pavie.)

948. L'aire d'un polygone de m côtés est égale à la *somme* des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ triangles que l'on peut former avec $m - 1$ de ses côtés combinés deux à deux : chacun de ces triangles ayant deux de ses côtés égaux aux côtés correspondants du polygone et dirigés de la même manière. (G. Bellavitis.)

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE EN ITALIE.

On sait qu'une décision du Ministère de l'Instruction publique du Royaume d'Italie a prescrit, comme unique traité classique de géométrie à l'usage des lycées, le livre toujours jeune du vieil Euclide, en attendant qu'il ait paru un ouvrage digne de le remplacer. Cette décision, prise sur l'initiative de savants illustres, auxquels la haute science ne fait pas négliger les intérêts de l'enseignement élémentaire, a dû nécessairement froisser d'anciennes habitudes et provoquer des réclamations. Le *Giornale di Matematiche* de Naples, malgré les idées bien connues de son éminent rédacteur, n'a pas voulu refuser aux diverses opinions le bénéfice de sa publicité, et dans sa dernière livraison de 1868, il a inséré la traduction de deux extraits de journaux anglais, où le géomètre alexandrin est un peu maltraité. Les discussions sérieuses profitent toujours à la vérité. Celle-ci nous a valu, dans le numéro suivant du *Giornale*, une réponse de MM. Brioschi et Cremona, auxquels est due en grande partie l'adoption de la mesure critiquée. Nous pensons que les abonnés des *Nouvelles Annales* liront avec intérêt et profit un extrait de la lettre des deux savants professeurs de Milan. Nos rédacteurs de programmes y pourront puiser d'utiles conseils. HOÜEL.

« Le dernier fascicule du *Giornale di Matematiche* contient une traduction d'un discours prononcé par M. Wilson, devant la Société Mathématique de Londres, et publié dans l'*Educational Times* du 1[er] septembre 1868, sous le titre de : *Euclid as a text-book of Elementary Geometry*. La conclusion de ce discours est la condam-

nation la plus formelle des éléments de geométrie d'Euclide, que l'auteur, avec une audace qui n'a pu manquer d'exciter la surprise des Membres mêmes de la docte Société, déclare *antiquated, artificial, unscientific, and ill-adapted for a text-book.....*

» Nous ne connaissons l'*Elementary Geometry* de M. Wilson (naturellement bien préférable, suivant lui, à celle d'Euclide), que par les articles qui lui ont été consacrés dans l'*Athenæum* du 18 juillet 1868, et dans un autre journal anglais. Dans ces articles critiques, que nous croyons sortis de la plume d'un illustre professeur, très-compétent en pareille matière, on met à nu les vices de raisonnement du Traité de Wilson ; si nous relevons ce fait, c'est pour en conclure que nous sommes fondés à mettre en doute la bonté des arguments de Wilson contre la méthode euclidienne. Ces arguments, du reste, n'ont rien de formidable ni d'essentiellement neuf : ce sont les mêmes qui, dans les siècles passés, furent plus d'une fois reproduits par les gens en quête de la *via regia* pour apprendre les éléments, et qui ont toujours été victorieusement repoussés par les plus éminents mathématiciens qui, connaissant intimement les mérites de l'ancienne géométrie, voulaient la conserver intacte dans toute sa pureté. Nous n'avons donc rien à dire de nouveau pour la défense d'Euclide, et nous estimerions même toute polémique superflue, si nous ne considérions les attaques dirigées contre la mesure (excellente, suivant nous), que le Gouvernement a prise pour l'introduction de la méthode euclidienne dans les gymnases et lycées du Royaume.

» On affirme, en premier lieu, qu'Euclide, rejetant les *constructions hypothétiques*, s'est imposé une restriction qui, non-seulement n'est ni nécessaire ni utile, mais qui de plus est absurde et nuisible, et que, en levant cette

restriction, on rendrait possible la classification de la Géométrie : *and classification... is the very essence of Science*. A cela, il nous suffira d'opposer l'opinion de Montucla, de Baltzer, de l'illustre Steiner, d'après laquelle « ce qui importe, c'est de découvrir l'organisme » qui relie entre eux les phénomènes d'espèce la plus » diverse du monde de l'espace (*) ». D'accord avec ces profonds penseurs, nous croyons que l'excellence logique d'Euclide réside précisément dans cet ordre que l'on veut critiquer, et que la prétention de classer les théorèmes de géométrie comme les insectes ou les coquillages dans un musée est, pour ne pas dire plus, indigne de la gravité de la science.

» On nous dit ensuite que dans Euclide la théorie des parallèles est *faultry*, et que l'*axiome* euclidien sur les parallèles peut se déduire comme conséquence de la notion de *direction* et de la définition des parallèles comme *des droites ayant la même direction*. Voilà donc que M. Wilson, avec le mot magique de *direction*, a résolu la grande difficulté qui, pendant plusieurs siècles, a travaillé le cerveau des commentateurs d'Euclide, et sur laquelle Legendre, lui-même, s'est fatigué pendant tant d'années! La question aujourd'hui est effectivement résolue, mais dans un sens tout différent, par les recherches de Gauss, de Lobatchefsky et de Bolyai ; les professeurs Baltzer et Hoüel ont appelé l'attention publique sur cette solution, qui avait passé inaperçue, et dernièrement le professeur Beltrami a fait paraître dans le *Giornale* de Naples un remarquable Mémoire qui dissipe toutes les obscurités du sujet, et met en pleine lumière l'essence de la géométrie euclidienne et de la géométrie non euclidienne. De ces recherches, il ressort clairement que la

(*) STEINER, *System. Entw.*, Préface, p. v.

théorie des parallèles, dans la géométrie réelle, ne peut être fondée sans un axiome expérimental (celui d'Euclide ou un autre équivalent), et l'on est forcé d'admirer la puissance de logique du géomètre de l'Antiquité, qui vit si nettement ce qu'il était nécessaire et suffisant d'emprunter à l'expérience, et ce qui pouvait se déduire au moyen du raisonnement abstrait. C'est là une importante question de logique qu'il importe de ne pas masquer par une fausse théorie des parallèles, comme celle que M. Wilson propose de substituer à la méthode euclidienne.

» M. Wilson affirme qu'Euclide est *unsuggestive*. Cela se comprend dans les écoles anglaises (au moins dans celles auxquelles le critique fait allusion), où l'on étudie les livres des *Éléments*, mot pour mot, matériellement, par cœur ; où il y a tel professeur capable de faire étudier un livre avant le livre précédent. Mais chez nous, on ne procède pas ainsi, Dieu merci ! Pas un de nos professeurs ne songerait à imposer à ses écoliers et à lui-même une tâche aussi lourde et aussi absurde. Dans nos écoles secondaires, un texte n'est jamais qu'un *guide* pour le maître et pour les élèves. Le Gouvernement veut, et nous ne pouvons que l'en féliciter, que l'on enseigne la géométrie *d'après Euclide*, et non qu'on récite Euclide comme un texte sacré (*).

» Les autres objections de M. Wilson contre Euclide, comme texte d'études, tombent dans le vide, si l'on compare les conditions différentes dans lesquelles se trouvent

(*) L'expérience a déjà prononcé en faveur de notre thèse. Bien que nous ne soyons encore qu'à la seconde année depuis l'adoption d'Euclide comme texte, cet enseignement n'en a pas moins porté déjà de bons fruits dans les écoles où le professeur s'y est appliqué avec zèle et avec goût. Nous pouvons, entre autres, citer un lycée où, avant la fin de la première année d'études, les élèves étaient déjà en état de résoudre par eux-mêmes la plupart des exercices proposés dans l'*Euclide* de Colenso

les écoles anglaises et les nôtres. Nous avons des écoles et des instituts techniques, dans lesquels on ne prescrit pas plus Euclide que l'étude du latin ou du grec ; de telles écoles n'existent pas en Angleterre. Les écoles anglaises sont toutes classiques, et tout le monde doit passer par leur enseignement, tandis que nos gymnases et nos lycées sont destinés à donner une éducation élevée, exceptionnelle. On ne s'y arrête pas à enseigner le dessin géométrique ; peu importe que les jeunes gens y apprennent telle ou telle proposition, ou qu'ils étudient beaucoup de choses en peu de temps. Mais il importe qu'ils apprennent à raisonner, à démontrer, à déduire ; ce ne sont donc pas des moyens rapides qu'il nous faut, ni des livres où la géométrie se trouve mêlée avec l'arithmétique ou l'algèbre. Euclide est le texte le mieux approprié à notre but.

» Chez nous, l'introduction d'Euclide dans les écoles a rendu un autre service considérable : celui d'écarter les innombrables petits traités, fabriqués dans un pur intérêt de spéculation, qui infestaient naguère les écoles, où il s'agit surtout de prendre pour texte d'enseignement un livre où règnent la rigueur scientifique et une bonne méthode. Malheureusement, en Italie, les mauvais livres sont ceux qui se vendent le moins cher, et de là leur succès.

» Cependant, notre orthodoxie géométrique n'est pas aussi exclusive ni aussi intolérante que celle que combattent les auteurs anglais. Nous ne faisons aucune difficulté d'avouer que les *Éléments* ne sont pas sans défauts ; qu'en plusieurs endroits ils auraient besoin d'être corrigés et simplifiés, ce qui n'est pas, il est vrai, une tâche facile à accomplir. D'accord avec notre excellent ami, le professeur Hirst, nous accepterions un *Euclid revised*, pourvu que ce ne fût pas un *Euclid disfigured*, pourvu qu'on y fît de la

géométrie, et non de l'arithmétique. Nous croyons aussi que pour atteindre le but d'une bonne éducation logico-géométrique, on pourrait se contenter des six premiers livres, en adoptant pour la géométrie de l'espace des méthodes plus modernes. Mais nous conjurons tous ceux qui ont à cœur les intérêts de la jeunesse, de se prêter à l'expérience des nouveaux programmes qui se fait dans nos écoles. Nous n'avons que trop constaté les inconvénients des changements trop fréquents et trop subits dans les plans d'études. Ce qui nous manque, c'est précisément la ténacité anglaise.

» Milan, le 24 février 1869.

» F. Brioschi, L. Cremona. »

RÈGLE A CALCUL A DOUBLE RÉGLETTE,

DE M. PÉRAUT, NÉGOCIANT A NANCY.

On ne peut se dissimuler que la règle à calcul, malgré les avantages évidents qu'elle offre à tous les calculateurs, n'a obtenu aucun succès dans les établissements d'enseignement. S'il nous fallait indiquer la cause de cette défaveur, nous serions peut-être conduit à la chercher en dehors des préoccupations scientifiques. Il nous suffirait de nous rappeler les étranges procédés au moyen desquels on chercha à acclimater dans les lycées cette innovation (datant de deux siècles et demi), et les sommes consacrées à l'achat des gigantesques modèles que les écoliers avaient baptisés du nom de *poutre à calcul*.

Aujourd'hui, on a renoncé à l'abus du calcul numérique, et même à son usage, et l'on est presque revenu aux anciens errements du temps où professeurs et élèves considéraient le calcul d'un triangle comme un tour de

force. On est dès lors revenu à l'inévitable Callet ou à ses succédanés, et la règle à calcul, pour avoir voulu prendre des dimensions exagérées, s'est vue réduite à zéro.

Ce n'est donc pas aux personnes assujetties aux tout-puissants programmes que nous nous adressons pour leur recommander l'ingénieux perfectionnement apporté à l'invention de Gunter par M. Péraux. C'est à tous ceux qui veulent appliquer le calcul numérique à d'autres usages qu'à la réception aux écoles à programmes.

M. Péraux n'est ni un astronome, ni un ingénieur, ni un professeur de mathématiques. C'est un négociant, qui a voulu économiser le temps qu'il consacrait auparavant à la vérification de ses factures. Ayant vu le parti que les directeurs d'usines tiraient de la règle logarithmique, il a voulu en étendre l'usage, et il a été ainsi conduit à y introduire un perfectionnement notable, qui, sans en augmenter les dimensions, en quadruple la puissance.

Pour cela, M. Péraux a commencé par abandonner les complications apportées à la règle à calcul, en la surchargeant d'indications diverses. Il s'est borné à l'usage naturel de cet instrument, qui est d'effectuer les multiplications et les divisions.

La règle ordinaire, dans sa partie usuelle, la seule que nous considérions, se compose de deux doubles échelles, portées par deux règles, que l'on peut faire glisser l'une devant l'autre. Les modèles ordinaires, longs de 26 centimètres, permettent d'atteindre les résultats avec une précision d'un trois-centième en moyenne.

M. Péraux, sans augmenter la longueur de l'instrument, l'a disposé de manière à obtenir une précision quatre fois plus grande, c'est-à-dire de $\frac{1}{1200}$ au moins. Pour cela, il a eu l'ingénieuse idée de replier en quatre

la double échelle, et de disposer les divisions sur les deux bords d'une double réglette, de même que sur les bords adjacents de la règle fine. Pour passer de l'usage de la règle ordinaire à celui de la règle de M. Péraux, il suffit de placer les deux réglettes de manière que le commencement de l'une coïncide avec la fin de l'autre. On aura alors en présence les mêmes correspondances de divisions qu'au moyen de la double échelle de la règle ordinaire. Ce seul précepte suffira pour comprendre le maniement de la nouvelle règle, lorsqu'on sera déjà exercé à celui de l'ancienne, et des volumes écrits sur ce sujet ne remplaceraient pas quelques heures de pratique.

Nous espérons que ces indications engageront les personnes qui tiennent à calculer promptement, à se procurer l'instrument perfectionné. Plus tard, peut-être, pourra-t-il être question de l'introduire dans l'Université.

HOUEL.

BIBLIOGRAPHIE.

M. Boncompagni continue la publication du *Bulletin de Bibliographie et d'Histoire des sciences mathématiques et physiques* (*Bullettino di Bibliografia et di Storia delle scienze matematiche et fisiche*).

Le numéro d'octobre 1868 contient les Mémoires suivants :

Manière de compter des anciens avec les doigts des mains, d'après un petit poëme inédit arabe de *Chems-Eddin el Mossouli*, et le *Tratado de mathematicas de Juan Perez de Moya*, imprimé à Alcala de Henares, en 1573, par M. Aristide Marre;

Sur la lettre de Pierre Peregrinus de Maricourt, et

sur quelques découvertes et théories magnétiques du XIIIe siècle. Second Mémoire de P. D. Timoteo Bertelli Barnabita.

Le numéro de novembre est rempli par la suite de ce dernier Mémoire.

M. Catalan nous a adressé un extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XXVII, n° 2, qui contient un théorème intéressant sur les roulettes.

Théorème. — *Soit une courbe* ABC *roulant sur une droite fixe* DE, *en entraînant un point* M *de manière à lui faire décrire une roulette* MM'M''*; soit ensuite* PP'P'' *le lieu des projections du point* H *sur les tangentes* DCE, D'C'E'... *à la courbe* ACB, *c'est-à-dire la podaire du poins* M (*supposé fixe*) *relativement à cette courbe* (*supposée fixe*)*; soient* C, M, P *trois points correspondants de ces trois courbes.*

La somme algébrique des courbures de la roulette et de la podaire, en deux points correspondants, est égale à l'inverse de la distance comprise entre le point décrivant de la roulette et le point où la courbe roulante touche la droite fixe.

On conclut de là le théorème de Steiner, retrouvé par MM. Mannheim et Paul Serret (*Nouv. Ann.*, 1re série, t. XVIII, p. 341).

Théorème de Steiner. — *Si l'on considère l'arc de roulette engendré par un point* O, *invariablement lié à une courbe mobile, pendant que l'arc* MN *de cette courbe roule sans glisser sur une droite, et l'arc conjugué de la courbe podaire, lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées au même point* O (*regardé comme immobile*) *sur les diverses tangentes de l'arc* MN

(devenu fixe), ces deux arcs conjugués auront la même longueur.

On peut aussi en déduire le théorème suivant, plus général que celui de Steiner et dû à M. Lamarle.

Théorème de M. Lamarle. — *Lorsqu'une courbe plane* ACB *roule sur une droite fixe* EF, *il existe un rapport constant entre la longueur de la roulette* MON, *décrite par un point* M *lié à la courbe roulante et la longueur correspondante de la courbe* G′P′H′, *lieu des points où les tangentes à* ACB *sont coupées, sous l'angle* B, *par des droites partant de* M. *Ce rapport est exprimé par l'égalité*

$$\frac{\text{MON}}{\text{G}'\text{P}'\text{H}'} = \sin\beta.$$

J. B.

CORRESPONDANCE.

Dans une Note très-intéressante, M. *Delègue*, professeur de philosophie au collége de Dunkerque, réclame pour *Blaise Pascal* le droit de donner son nom à la *formule du Binôme;* nous croyons que *la douce et vieille habitude* persistera, et que Pascal, en cela semblable à Colomb, sera éternellement déshérité; mais il paraît difficile de ne pas se rendre aux preuves que produit notre honorable correspondant, et nous prions instamment nos lecteurs de lire dans les œuvres de Pascal le *Traité du triangle arithmétique* (3e vol., p. 243, Hachette); ils y verront surtout la conséquence XII, et, plus loin (p. 266), l'usage du triangle arithmétique pour trouver les puissances des binômes; dans la conséquence XII, Pascal

démontre la proposition que nous exprimons aujourd'hui par la relation

$$C_m^{p+1} = C_m^p \frac{m-p}{p+1}.$$

Cette proposition, rapprochée de ce qui est dit à la page 266, constitue évidemment la démonstration complète de la *formule du Binôme*, et nous partageons complétement l'opinion de M. *Delègue :* nous regrettons vivement de ne pouvoir publier en entier la Note qu'il a bien voulu nous communiquer.

Selon M. Delègue, c'est aussi Pascal qui, le premier, a donné la méthode pour démontrer qne la différentielle de x^m est $mx^{m-1}\,dx$, quel que soit l'exposant, entier, fractionnaire ou négatif. Nous serons heureux de communiquer à nos lecteurs la preuve de ce fait, si l'auteur veut bien nous la transmettre.

ERRATA DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRON.

Page 443, Tang 39° 58′ 10″: différence tabulaire : *au lieu de* 228, *lisez* 428.

Cette faute typographique a été signalée presque simultanément par M. Grosdemange, triangulateur du cadastre, et par M. Reynaud, candidat à l'École Centrale.

Page 6, Introduction, 1re colonne, formule (9) : *au lieu de* $E < \frac{3D}{4}$, *lisez* $E < \frac{3}{4D}$.

SUR LA MÉTHODE D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE DE M. BELLAVITIS (CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES);

PAR M. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Depuis les immenses progrès qu'elle a fait faire à l'Analyse par les travaux de Cauchy et de Riemann, la théorie géométrique des quantités complexes a pris rang dans la science classique. Mais on ne s'est pas encore assez occupé des services que peut rendre cette théorie à la Géométrie pure et à la Mécanique, lorsqu'on y considère les grandeurs géométriques pour elles-mêmes, et non plus comme un système particulier de notations remplaçant les notations ordinaires de l'Algèbre.

Cependant tout lecteur attentif des pages qui vont suivre restera convaincu des avantages de cette méthode comme procédé d'Analyse géométrique, et ne pourra que s'étonner de l'indifférence avec laquelle a été accueillie jusqu'à ce jour la belle découverte de M. Giusto Bellavitis. Ce n'est pas que de nombreux travaux n'aient été faits dans la même direction. Mais aucun des auteurs qui ont traité ce sujet n'a présenté la méthode avec autant d'étendue que le savant professeur de Padoue, dont les travaux remontent à l'année 1832; aucun ne l'a exposée sous une forme aussi simple et aussi bien appropriée au sujet. Aussi sommes-nous heureux de l'occasion que nous offre la Rédaction des *Nouvelles Annales*, d'appeler l'attention des Géomètres français sur un instrument d'Analyse qui peut être d'une si grande utilité tant au point de vue de l'enseignement qu'à celui des progrès de la science.

Nous avons cherché à exposer le plus brièvement possible les principes contenus dans les ouvrages que l'Auteur a bien voulu mettre à notre disposition (*), et notre tâche a été grandement facilitée par les précieuses indications qu'il nous a lui-même fournies.

1. Carnot, dans sa *Géométrie de position*, parle des avantages que retirerait la Géométrie de l'introduction d'un algorithme représentant à la fois la grandeur et la position des diverses parties d'une figure, de telle sorte que, sans avoir besoin de recourir à des considérations géométriques spéciales, on pût obtenir les résultats cherchés par l'application d'un calcul fondé sur un petit nombre de lois générales.

Le désir de Carnot est complétement réalisé depuis trente-cinq ans par le *Calcul des équipollences* dû au génie inventif de M. Bellavitis. Bien que cette méthode féconde ne soit pas encore connue dans notre pays, cependant les principes sur lesquels elle repose ont été établis pour la première fois en France, il y a plus de soixante ans, par Argand, et développés ensuite à diverses reprises par les travaux de Français, de Mourey, de Saint-Venant, de Cauchy. Nous pourrions encore citer, parmi les ouvrages relatifs au même sujet, le *Calcul de*

(*) *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica* (*Calcolo delle Equipollenze*); Padova, 1835.

Saggio sull' Algebra degli immaginarii; Venezia, 1852.

Sposizione del metodo delle Equipollenze; Modena, 1854.

Calcolo dei Quaternioni di W. R. Hamilton, e sua relazione col metodo delle Equipollenze; Modena, 1858.

Sposizione dei nuovi metodi di Geometria analitica; Venezia, 1860.

Determinazione numerica delle Radici immaginarie delle equazioni algebriche; Venezia, 1864.

Elementi di Geometria, di Trigonometria e di Geometria analitica, ec.; Padova, 1862.

situation de Scheffler (*), le Mémoire de Siebeck sur la *Représentation graphique des fonctions imaginaires* (**), le *Calcul géométrique* de Dillner (***), etc. La théorie des quaternions d'Hamilton (****) repose sur des bases analogues, et peut, jusqu'à un certain point, être regardée comme une extension à l'espace du Calcul des équipollences. Les règles de ce dernier Calcul sont précisément les mêmes que celles du Calcul algébrique, tandis que les quaternions exigent un algorithme spécial.

2. La méthode des équipollences se distingue principalement par les avantages suivants :

1° L'abondance des théorèmes, qui découlent d'un principe unique, toute propriété de points placés en ligne droite donnant immédiatement une propriété des points d'un plan, dès que l'on change les équations relatives aux premiers points en équipollences relatives aux seconds;

2° La facilité avec laquelle on parvient à la solution graphique des problèmes : pour les questions mêmes qui passent pour difficiles, la méthode fournit directement des solutions plus courtes que celles que l'on avait découvertes par des combinaisons artificielles de théorèmes géométriques ;

3° La théorie des courbes, débarrassée de tout système spécial de coordonnées, conduit à des formules plus simples et en même temps plus générales, qui expriment

(*) *Der Situationskalkul;* Braunschweig, 1851.

(**) *Journal f. d. r. u. ang. Mathematik,* Bd. LV, 1858.

(***) *Geometrisk Kalkyl;* Upsala, 1860. — L'auteur en fait paraître en ce moment une nouvelle rédaction dans l'excellent journal qu'il dirige (*Tidskrift för Matematik och Fysik;* Upsala).

(****) *Lectures on Quaternions;* Dublin, 1853. — *Elements of Quaternions;* London, 1866.

les affections des courbes, sans qu'il soit besoin de les rapporter à aucun système arbitraire;

4° Elle fournit le type réel des quantités imaginaires, par lequel sont pleinement justifiés les calculs de l'Algèbre, de la manière que Cauchy regardait comme la seule satisfaisante.

3. Pour faire connaître la méthode, il nous faut donner quelques définitions et quelques règles de calcul. Nous croyons inutile de nous arrêter à démontrer la légitimité des premières et la justesse des secondes, parce que, le lecteur une fois convaincu de l'utilité de la méthode, il lui sera facile de retrouver par lui-même la démonstration des principes.

4. Définition. — Une droite désignée, comme d'habitude, par deux lettres, est considérée comme prise *à partir du point indiqué par la première lettre jusqu'au point indiqué par la seconde*, et l'on tient compte, non-seulement de sa grandeur, mais aussi de sa direction (*).

D'après cela, KI et IK ne sont pas deux droites *équipollentes*, quoique l'une soit équipollente à l'autre prise avec le signe —, c'est-à-dire que l'on ait KI ≏ — IK.

Deux droites AB, DC sont dites *équipollentes* (et peuvent se remplacer mutuellement) dans le cas seulement où elles sont à la fois *égales, parallèles et dirigées dans le même sens*; de sorte que ABCD soit un parallélogramme. C'est ce que l'on exprime en écrivant

AB ≏ DC, ou AB ≏ — CD, ou encore AB + CD ≏ o.

(*) Pour exprimer qu'une droite est considérée à ce double point de vue, on surmonte quelquefois les deux lettres qui la représentent d'un trait horizontal; cependant, pour simplifier l'écriture, nous supprimerons ce trait, et il n'en pourra résulter aucune équivoque, en ayant soin d'employer la notation *gr* AB pour désigner la longueur de la ligne AB

Une droite affectée d'un coefficient numérique conserve sa direction et change de longueur proportionnellement à ce coefficient. Ainsi l'équipollence

$$AB \doteq 2DM$$

signifie que AB est parallèle à DM et dirigé dans le même sens, et que la longueur de AB est double de celle de DM. Pareillement, la formule

$$AP \doteq \frac{1}{3} AB$$

veut dire que le point P est situé au tiers de AB (puisque, sans cela, AP ne pourrait pas être parallèle à AB).

5. Définition. — La *somme géométrique* de deux ou de plusieurs droites KI, DM,... s'obtient en menant, par un point quelconque O, une droite OP équipollente à KI; puis, par la seconde extrémité P, une droite PQ équipollente à DM, etc.; la droite OQ sera la somme géométrique des droites KI, DM,....

De quelque autre point que l'on fût parti, et dans quelque autre ordre que l'on eût additionné les droites, on serait toujours arrivé à une somme géométrique équipollente à OQ.

La même chose a lieu, quel que soit le nombre des droites que l'on ajoute entre elles.

6. Règle I. — Pour trois points quelconques A, B, C, on a l'équipollence

$$AB + BC \doteq AC.$$

C'est là une conséquence de la définition que l'on vient de donner de la somme géométrique.

Pour que l'on ne confonde pas une somme de cette

nature avec une somme ordinaire, M. Bellavitis emploie, au lieu du symbole =, un symbole particulier, celui par lequel les astronomes désignent le signe de la Balance, voulant peut-être faire allusion à l'analogie de la sommation géométrique avec la composition des forces en Mécanique. Dans le désir d'éviter autant que possible l'introduction de notations nouvelles, nous avons conservé le signe d'égalité ordinaire, pensant que la confusion sera aussi sûrement évitée au moyen de la convention que nous ferons d'affecter une ligne de la caractéristique *gr* (abrégé de *grandeur*) toutes les fois que cette ligne devra être considérée en *grandeur* seulement, abstraction faite de sa direction.

D'après la Règle que nous venons d'énoncer, on peut encore écrire

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AB}.$$

Une droite BC peut ainsi être rapportée à un point quelconque A. On a encore

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} + \mathrm{BA}, \quad \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 0.$$

7. Règle II. — Toutes les fois qu'au moyen d'un calcul on arrive à une équipollence binôme

$$x.\mathrm{AB} = y.\mathrm{CD},$$

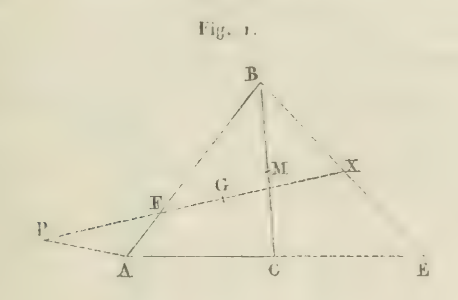
si l'on sait, de plus, que les droites AB, CD ne sont pas parallèles, on en conclura que les coefficients x et y sont nuls séparément.

En effet, si x et y n'étaient pas nuls, cette équipollence indiquerait que les droites AB, CD seraient parallèles, et que leur rapport est égal à celui de y à x. Ainsi une équipollence sert à déterminer deux quantités inconnues.

Montrons l'usage de ces Règles par des exemples faciles.

8. *Exemple I.* — On veut construire un triangle ABC (*fig.* 1), connaissant le centre de gravité G, le point F

Fig. 1.



situé au quart du côté AB, et l'extrémité E du côté AC, prolongé d'une quantité CE = AC.

Les conditions du problème sont exprimées par les équipollences

$$AE = 2AC, \quad AF = \frac{1}{4} AB, \quad AG = \frac{1}{3}(AB + AC),$$

puisque, M étant le milieu du côté BC, on a

$$AG = \frac{2}{3} AM,$$

et

$$AM = AB + BM = AB + \frac{1}{2} BC = AB + \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} AB$$
$$= \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Les points inconnus sont les sommets A, B, C. En éliminant deux de ces points par la substitution dans la troisième équipollence des valeurs tirées des deux premières, il vient

$$3AG = 4AF + \frac{1}{2} AE.$$

Il faut pour cela que le point inconnu A entre dans la seule droite AG. Or on aura, par la Règle I,

$$AF \doteq AG + GF, \quad AE \doteq AG + GE,$$

par conséquent

$$3AG \doteq 4AG + 4GF + \frac{1}{2}AG + \frac{1}{2}GE;$$

d'où l'on tire

$$-\frac{3}{2}AG \doteq 4GF + \frac{1}{2}GE,$$

ou

$$GA \doteq \frac{8}{3}GF + \frac{1}{3}GE.$$

Cette équipollence nous apprend qu'il faut prolonger GF, de manière qu'on ait $GP \doteq \frac{8}{3}GF$, puis mener $PA \doteq \frac{1}{3}GE$ (c'est-à-dire PA parallèle à GE et égal au tiers de GE), et A sera le sommet du triangle demandé.

Cherchons, dans la figure précédente, dans quels rapports se coupent les deux droites BE, FG au point X. Posons $BX \doteq x.BE$ (ce qui exprime que le point X tombe sur la ligne BE, le rapport $BX : BE = x$ restant encore inconnu), et soit de même $FX \doteq y.FG$. Par la Règle I, on a

$$AX \doteq AB + BX \doteq AB + x.BE,$$

et pareillement

$$AX \doteq AF + y.FG.$$

Après avoir éliminé AX, ce qui donne

$$AB + x.BE \doteq AF + y.FG,$$

nous pourrons, au moyen des équipollences données

$$AE \doteq 2.AC, \quad AF \doteq \frac{1}{4}AB, \quad AG \doteq \frac{1}{3}(AB + AC),$$

obtenir une équipollence entre les seules droites AB, AC,

$$AB + 2x.AC - x.AB = \frac{1}{4}AB + \frac{y}{3}(AB + AC) - \frac{y}{4}AB;$$

et comme les droites AB, AC ne sont pas parallèles, il s'ensuit, d'après la Règle II, qu'on devra avoir séparément

$$1 - x - \frac{1}{4} - \frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 0, \quad 2x - \frac{y}{3} = 0,$$

ce qui donne

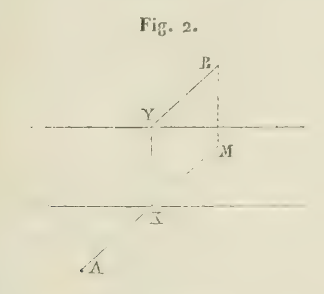
$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 6x = 3.$$

Par conséquent la droite FG coupe la droite BE en son milieu X, et l'on a

$$FX = 3FG.$$

9. *Exemple II.* — Soient A et B (*fig.* 2) deux points séparés par une rivière, que l'on doit traverser sur un

Fig. 2.



pont perpendiculaire aux deux rives. Déterminer la position XY de ce pont, de manière que la somme arithmétique des longueurs AX + XY + YB soit le plus petite possible.

L'équipollence (Règle II)

$$AX + XY + YB = AB$$

peut s'écrire sous la forme

$$AX + YB = AB - XY,$$

et comme la largeur XY de la rivière est connue en grandeur et en direction, nous pourrons construire la somme géométrique

$$AB - XY = AB + YX,$$

laquelle sera AM, en menant BM = YX. Puis, dans l'équipollence

$$AX + YB = AM,$$

on voit que la somme arithmétique des longueurs AX + YB sera minimum, quand AX tombera sur AM, et que par conséquent YB sera parallèle à cette droite AM.

10. Le Calcul des équipollences comprend le Calcul barycentrique, dont Moebius avait déjà montré les nombreuses applications. Ainsi le centre de gravité G des trois points A, B, C est exprimé par la relation

$$AG + BG + CG = o,$$

d'où l'on peut déduire, au moyen de la Règle I du Calcul des équipollences, la relation

$$AG + AG - AB + AG - AC = o, \quad \text{ou} \quad 3AG = AB + AC,$$

dont nous nous sommes servis plus haut.

Mais la partie de la méthode qui se rapporte aux produits de droites, et qui s'applique exclusivement aux figures tracées dans un même plan, appartient entièrement à M. Bellavitis.

11. Pour définir plus facilement ce qu'il faut entendre, dans la méthode des équipollences, par un monôme formé par la multiplication ou la division de plusieurs droites,

il est bon de commencer par définir l'*inclinaison* d'une droite.

De même que la *grandeur* d'une droite s'exprime par un nombre rapporté à une unité linéaire que l'on choisit arbitrairement, mais à laquelle on doit ensuite conserver constamment la même longueur; de même, par *inclinaison* d'une droite on entend l'angle que fait cette droite avec une autre droite choisie arbitrairement pour origine des inclinaisons. De là résulte qu'un angle BAC est exprimé par

$$\text{incl AC} - \text{incl AB},$$

en désignant par incl AB l'inclinaison de la droite AB. Les angles sont considérés comme comptés depuis la première lettre vers la dernière, et il faut avoir égard à leur signe. Ainsi l'angle CAB est de signe contraire à l'angle BAC, et est égal à

$$\text{incl AB} - \text{incl AC}.$$

12. Cela posé, un monôme tel que

$$\frac{\text{AB}.\text{CD}}{\text{EF}},$$

par exemple, sera équipollent à une droite GH, dont la grandeur aura pour valeur

$$\frac{\text{gr AB} \times \text{gr CD}}{\text{gr EF}},$$

et dont l'inclinaison sera

$$\text{incl GH} = \text{incl AB} + \text{incl CD} - \text{incl EF}.$$

On retiendra plus aisément cette dernière équation, en la rapprochant de la formule qui donne les logarithmes d'un produit et d'un quotient.

Quand on sait interpréter un monôme, alors, en ayant de plus égard à la définition donnée plus haut de la somme géométrique, on comprend la signification d'une équipollence quelconque entre des polynômes.

Pour mieux expliquer la signification d'un monôme, observons que ce monôme peut se ramener à une suite de proportions. Si l'on fait en sorte que la seconde droite ait une extrémité commune avec la première, en supposant que la quatrième doive avoir aussi une extrémité commune avec la troisième, une proportion peut s'écrire ainsi

$$AB : AC :: OD : OX,$$

et cette équipollence comprendra les deux équations

$$\text{gr}\, AB : \text{gr}\, AC = \text{gr}\, OD : \text{gr}\, OX,$$
$$\text{incl}\, AB - \text{incl}\, AC = \text{incl}\, OD - \text{incl}\, OX.$$

Pour construire OX, prenons sur AB la longueur AD′ égale en grandeur à OD; formons le triangle AD′X′ homothétique à ABC, de sorte que le point X′ tombe sur AC. Alors le triangle ODX sera *directement* égal au triangle AD′X′, en entendant, par *directement* égal, que l'on pourra faire coïncider AD′X′ avec ODX, en le transportant dans son plan, sans retournement.

13. En réfléchissant attentivement sur les définitions que nous avons admises, on reconnaît qu'elles n'impliquent aucune contradiction, et que les équipollences peuvent se traiter absolument comme les équations, et conduiront toujours à des résultats exacts quand on les interprétera conformément aux principes de la méthode. Il s'ensuit de là que toute équation relative aux points d'une droite peut se changer en une équipollence relative

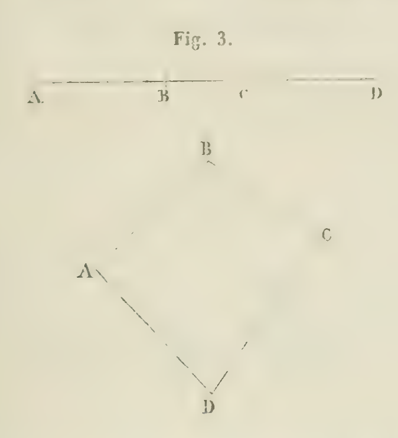
aux points d'un plan, en ayant soin de tenir compte du signe de chaque droite. En voici un exemple :

Entre quatre points A, B, C, D en ligne droite (*fig*. 3), on a la relation

$$AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0$$

(remarquons que, si BC, CD sont positifs, DB sera négatif) : ce qui se démontre en observant que CD = AD — AC, BC = AC — AB, DB = AB — AD, et qu'en substituant

Fig. 3.



ces valeurs, la relation devient identique. On démontrera de la même manière que, pour quatre points A, B, C, D d'un plan, on a l'équipollence

$$(1) \qquad AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0.$$

Pour la construire, on peut imaginer qu'elle soit divisée par une droite OH, prise pour origine des inclinaisons et pour unité de longueur (cette ligne OH pouvant être une quelconque des lignes AB, CD, . . .). Les trois termes de l'équipollence pourront de cette manière exprimer les

côtés LM, MN, NL d'un triangle, puisque l'on a, par la Règle I,

$$\mathrm{LM} + \mathrm{MN} + \mathrm{NL} = 0.$$

Pour interpréter cette équipollence (1), ainsi que toute autre équipollence trinôme, nous poserons la Règle suivante :

14. Règle III. — Si, dans une équipollence trinôme, deux termes ont une égale inclinaison, la grandeur de l'autre terme sera égale à la somme des grandeurs des deux premiers.

En effet, si incl LM = incl MN (*fig.* 4), les trois points

Fig. 4.

L M N

L, M, N seront en ligne droite (au lieu de former un triangle), et, par suite,

$$\mathrm{gr\,NL} = \mathrm{gr\,LM} + \mathrm{gr\,MN}.$$

Si, au contraire, les inclinaisons de deux termes de l'équipollence diffèrent de 90 degrés, le triangle LMN, dont les côtés sont respectivement équipollents aux termes de l'équipollence, sera rectangle, et les grandeurs de ses côtés satisferont au théorème connu ; c'est-à-dire que, si $\mathrm{incl\,LM} - \mathrm{incl\,MN} = \pm 90°$, on aura

$$(\mathrm{NL})^2 = (\mathrm{LM})^2 + (\mathrm{MN})^2.$$

Si les inclinaisons des trois termes forment une progression arithmétique, c'est-à-dire si l'on a

$$\mathrm{incl\,LM} - \mathrm{incl\,MN} = \mathrm{incl\,MN} - \mathrm{incl\,NL},$$

le triangle LMN sera isoscèle, et, par conséquent, on aura

$$\mathrm{gr\,LM} = \mathrm{gr\,NL}.$$

Si enfin on a

$$\mathrm{incl\,LM} - \mathrm{incl\,MN} = 120^\circ, \quad \mathrm{incl\,MN} - \mathrm{incl\,NL} = 120^\circ,$$

ces différences étant égales aux angles extérieurs en M et en N du triangle LMN, ce triangle sera équilatéral, et, par suite, on aura

$$\mathrm{gr\,LM} = \mathrm{gr\,MN} = \mathrm{gr\,NL}.$$

15. Appliquons cette Règle à l'équipollence précédente (1). Si les deux premiers termes ont des inclinaisons égales, c'est-à-dire si l'on a

$$\mathrm{incl\,AB} + \mathrm{incl\,CD} = \mathrm{incl\,AD} + \mathrm{incl\,BC},$$

en remarquant que

$$\mathrm{incl\,AD} - \mathrm{incl\,AB} = \mathrm{angle\,BAD},$$
$$\mathrm{incl\,CB} - \mathrm{incl\,CD} = \mathrm{angle\,DCB},$$

il viendra

$$\mathrm{angle\,BAD} + \mathrm{angle\,DCB} = \mathrm{incl\,CB} - \mathrm{incl\,BC} = 180^\circ.$$

Donc, si la somme de deux angles opposés d'un quadrilatère est égale à 180°, on aura, par la Règle en question,

$$\mathrm{gr}(\mathrm{AB.CD}) + \mathrm{gr}(\mathrm{AD.BC}) = \mathrm{gr}(\mathrm{AC.DB}),$$

ce qui donne le théorème connu de Ptolémée.

Si, au lieu de cela, dans le quadrilatère ABCD, les deux angles opposés BAD, DCB ont pour somme 90° ou 270°, on aura, par la seconde partie de la Règle,

$$\mathrm{gr}(\mathrm{AB.CD})^2 + \mathrm{gr}(\mathrm{AD.BC})^2 = \mathrm{gr}(\mathrm{AC.DB})^2.$$

Si les trois points B, C, D (*fig.* 5) sont en ligne droite,


Fig. 5.



et que, de plus, on ait angle BAC = angle CAD = 60°, il viendra alors

$$\begin{aligned}&\text{incl}(AB.CD) - \text{incl}(AD.BC)\\ &\quad = \text{incl}\,AB + \text{incl}\,CD - \text{incl}\,AD - \text{incl}\,BC\\ &\quad = \text{incl}\,AB - \text{incl}\,AD = -120^\circ.\end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned}&\text{incl}(AD.BC) - \text{incl}(AC.DB)\\ &\quad = \text{incl}\,AD - \text{incl}\,AC + \text{incl}\,BC - \text{incl}\,DB\\ &\quad = 60^\circ - 180^\circ = -120^\circ;\end{aligned}$$

donc, en vertu de la dernière partie de la Règle III, nous aurons

$$\text{gr}(AB.CD) = \text{gr}(AD.BC) = \text{gr}(AC.DB);$$

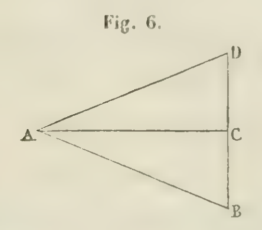
d'où il résulte ensuite que (BC, $\frac{1}{2}$ BD, CD étant trois droites en progression arithmétique) AD, 2AC, AB seront en progression harmonique.

16. La méthode peut encore servir à démontrer les théorèmes de la Géométrie élémentaire. Ainsi, par

exemple, si à la droite AC (*fig.* 6) on mène les deux perpendiculaires égales et opposées CB, CD, on a

$$AB = AC + CB, \quad AD = AC + CD;$$

Fig. 6.



d'où, à cause de CD = — CB,

$$AB.AD = AC.AC + CB.CD.$$

Les deux termes du second membre ont des inclinaisons égales, puisque

$$90^\circ = \text{incl}\,CB - \text{incl}\,AC = \text{incl}\,AC - \text{incl}\,CD;$$

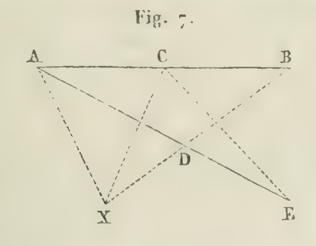
par conséquent

$$\text{gr}(AB.AD) = \text{gr}(AB)^2 = \text{gr}(AC)^2 + \text{gr}(CB)^2.$$

17. Donnons encore un exemple de problème.

Construire, sur une base donnée AB (*fig.* 7), un

Fig. 7.



triangle ABX, connaissant le produit de ses côtés AX, BX, et la différence BAD des angles à la base, ce qui re-

vient à dire que l'on doit avoir

$$\text{angle } DAX = \text{angle } XBA,$$

ou

$$\text{incl } AX - \text{incl } AD = \text{incl } BA - \text{incl } BX.$$

On pourra donner à AD une longueur telle, que les deux conditions du problème soient exprimées par l'équipollence

$$AX.BX = AD.BA.$$

En écrivant AX — AB au lieu de BX, la droite AX sera donnée par une équipollence du second degré, qui, résolue à la manière ordinaire, donne

$$AX - \frac{1}{2} AB = \sqrt{\frac{1}{4}(AB)^2 + AD.BA}.$$

En prenant $AC = \frac{1}{2} AB$, $AE = 2 AD$, il vient

$$AX - AC = \sqrt{AC(AC - AE)},$$

ou

$$CX = \sqrt{AC.EC} = \sqrt{CA.CE},$$

ce qui nous montre comment on doit construire la ligne CX, qui est bissectrice de l'angle ACE, et moyenne proportionnelle entre CA et CE.

18. Les conventions adoptées jusqu'ici ne sont pas suffisantes pour exprimer que les angles sont égaux et de signe contraire, que les triangles sont égaux et inversement placées (ou *symétriques*, comme on les appelle, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent coïncider qu'après le retournement du plan de l'un d'eux), etc.

M. Bellavitis appelle *conjuguée* d'une droite ou d'une figure, la droite ou la figure que l'on obtient en faisant faire à la première une demi-révolution autour d'une droite parallèle à celle que l'on a prise pour origine des inclinaisons.

Ainsi, si OH (*fig.* 8) est l'origine des inclinaisons, en menant AK parallèle à OH, et construisant le triangle

Fig. 8.

AKB′ *inversement égal* au triangle AKB, la droite AB′, ainsi que toute autre qui lui sera équipollente, sera dite *conjuguée* de AB, ce que l'on écrira ainsi :

$$AB' \doteq \text{conj}\, AB.$$

Il est évident que l'on a

$$\text{gr}(\text{conj}\, AB) = \text{gr}\, AB,$$
$$\text{incl}(\text{conj}\, AB) = -\,\text{incl}\, AB.$$

Il est est facile, en outre, de s'assurer que l'on a cette Règle :

19. Règle IV. — En même temps qu'une équipollence donnée, a toujours lieu aussi sa conjuguée, laquelle s'obtient en remplaçant chaque droite par sa conjuguée.

Le produit de deux droites conjuguées entre elles est égal au carré de leur grandeur commune, et a une inclinaison nulle, c'est-à-dire que

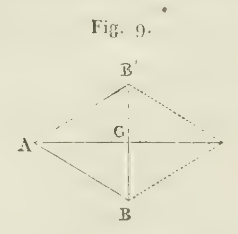
$$AB.\text{conj}\, AB \doteq \text{gr}(AB)^2.$$

Une droite, divisée par sa conjuguée, donne pour quotient l'unité, avec une inclinaison double de celle de la droite, c'est-à-dire que

$$\text{gr}\left(\frac{AB}{\text{conj}\, AB}\right) = 1, \quad \text{incl}\left(\frac{AB}{\text{conj}\, AB}\right) = 2\,\text{incl}\, AB.$$

La somme géométrique d'une droite et de sa conjuguée a une inclinaison nulle, et est égale au double de la pro-

Fig. 9.



jection de la droite sur l'axe d'inclinaison nulle, c'est-à-dire que l'on a (*fig.* 9)

$$AB + \text{conj}\,AB = 2\,AG.$$

On voit encore que

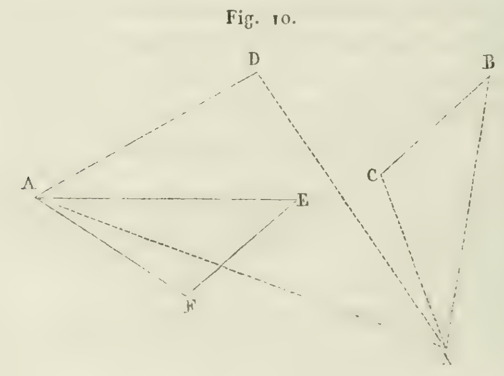
$$AB - \text{conj}\,AB = B'B = 2\,GB,$$

dont l'inclinaison est de 90 degrés.

20. Le problème suivant va montrer l'usage de cette Règle.

Trouver le sommet commun X de deux triangles inversement semblables (*fig.* 10), dont on donne les bases AD, BC.

Fig. 10.



La similitude est exprimée par les deux équations

$$\text{gr}\,AX : \text{gr}\,AD = \text{gr}\,BX : \text{gr}\,BC,$$
$$\text{angle}\,DAX = -\,\text{angle}\,CBX.$$

Cette dernière peut s'écrire

$$\text{incl}\,AX - \text{incl}\,AD = -(\text{incl}\,BX - \text{incl}\,BC)$$
$$= \text{incl}(\text{conj}\,BX) - \text{incl}(\text{conj}\,BC),$$

et l'on voit par là que les conditions du problème sont données par l'équipollence

$$AX : AD = \text{conj}\,BX : \text{conj}\,BC.$$

En y faisant $\text{conj}\,BX = \text{conj}\,AX - \text{conj}\,AB$, on a, en développant,

$$\text{conj}\,BC.AX = AD.\text{conj}\,AX - AD.\text{conj}\,AB,$$

et, en même temps que cette équipollence, a lieu sa conjuguée,

$$BC.\text{conj}\,AX = \text{conj}\,AD.AX - \text{conj}\,AD.AB.$$

Entre ces équipollences, nous pourrons éliminer $\text{conj}\,AX$, et nous aurons, pour déterminer AX, l'équipollence

$$(AD.\text{conj}\,AD - BC.\text{conj}\,BC)AX$$
$$= AD(AB.\text{conj}\,AD + BC.\text{conj}\,AB).$$

En prenant pour origine des inclinaisons la droite AB, il vient $\text{incl}\,AB = 0$, $AB = \text{conj}\,AB$, et si l'on détermine la droite $AE = \text{conj}\,AD$ (c'est-à-dire, si l'on construit le triangle ABE inversement égal à ABD), et que l'on mène $EF = BC$, on aura

$$(AD.\text{conj}\,AD - BC.\text{conj}\,BC)AX$$
$$= AB.AD(\text{conj}\,AD + BC)$$
$$AB.AD(AE + BC) = AB.AD.AF.$$

Pour construire, d'après cela, la ligne AX, il suffira de déterminer son inclinaison. Or, comme chacun des produits AD.conj AD, BC.conj BC a une inclinaison nulle, on aura alors

$$\begin{aligned}\text{incl AX} &= \text{incl (AB.AD.AF)} = \text{incl AD} + \text{incl AF} \\ &= -\text{incl AE} + \text{incl AF} = \text{angle EAF}.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\text{angle BAX} = \text{angle EAF}.$$

21. OH, OI étant deux droites égales et perpendiculaires entre elles, si l'on multiplie une droite par le rapport $\frac{\text{OI}}{\text{OH}}$, on ne fera qu'augmenter l'inclinaison de 90 degrés, et, si l'on réitère cette multiplication, on aura

$$\left(\frac{\text{OI}}{\text{OH}}\right)^2 \text{AB} = -\text{AB}.$$

Donc le rapport $\frac{\text{OI}}{\text{OH}}$ se calcule précisément comme le $\sqrt{-1}$ de l'Algèbre. M. Bellavitis indique, pour abréger, ce rapport par un signe particulier, que nous remplacerons ici par la lettre i, généralement employée en Analyse pour désigner le symbole $\sqrt{-1}$.

Il est conforme aux principes du calcul que i^u.AB exprime une droite égale à AB en grandeur, et dont l'inclinaison surpasse celle de AB de $u.90°$, u pouvant être fractionnaire.

Lorsqu'on prend la conjuguée d'une équipollence, chaque i se change en $-i$, et chaque i^u en $(-i)^u$ ou i^{-u}.

Le symbole 1_t, employé par Cauchy, d'après Français et Mourey, est identique avec $i^{\frac{2}{\pi}t}$.

22. Pour exprimer l'aire d'un triangle ABC (*), on

(*) A partir d'ici, le lecteur est prié de faire la figure

rencontre l'expression de AC', qui est la droite AC rabattue autour de AB. On a

$$\text{gr AC}' = \text{gr AC},$$
$$\text{incl AC}' - \text{incl AB} = \text{incl AB} - \text{incl AC}$$
$$= \text{incl}(\text{conj AC}) - \text{incl}(\text{conj AB}).$$

Ces deux équations sont comprises dans l'équipollence

$$\text{AC}' = \frac{\text{AB.conj AC}}{\text{conj AB}}.$$

On en tire, P étant le milieu de CC',

$$\text{conj AB.PC} = \frac{1}{2}\,\text{conj AC.CC}'$$
$$= \frac{1}{2}(\text{AC.conj AB} - \text{AB.conj AC}).$$

Le premier membre a pour grandeur 2ABC, et pour inclinaison — incl AB + incl PC = 90°. En divisant donc les deux membres par $2i$, il en résulte

$$\text{ABC} = \frac{i}{4}(\text{AB.conj AC} - \text{AC.conj AB}),$$

expression qui, d'après la Règle I, peut s'écrire

$$\text{ABC} = \frac{i}{4}(\text{AB.conj BC} - \text{conj AB.BC}).$$

23. Faisons quelques applications de cette formule.

En parcourant le périmètre d'un polygone ABCDE, on a mesuré ses côtés et leurs inclinaisons sur le méridien magnétique. Pour calculer l'aire ABCDE, on observe qu'elle est la somme des triangles ABC, ACD, ADE, et que, par suite, elle a pour expression

$$\frac{i}{4}(\text{AB.conj BC} + \text{AC.conj CD} + \text{AD.conj DE} - \text{les termes conj}\ldots$$

D'après la Règle I, aux diagonales AC, AD on peut substituer les sommes géométriques AB + BC, AB + BC + CD, d'où il résulte que la formule nous apprend que l'aire du pentagone est la somme de six triangles, dont chacun a deux côtés équipollents à deux des côtés AB, BC, CD, DE (en omettant EA).

Si des sommets du polygone ABC on mène les droites équipollentes entre elles $AA' = BB' = CC'$, la somme algébrique des aires des triangles ABA′, BCB′, CAC′ est toujours nulle, car elle est exprimée par

$$\frac{i}{4}(AB.\text{conj}\,AA' + BC\,\text{conj}\,BB' + CA.\text{conj}\,CC' - \text{les termes conj.}),$$

et l'on a

$$AB + BC + CA = 0.$$

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 894

(voir 2e série, t. VII, p. 429).

Étant donné, sur un plan P, *un triangle quelconque* ABC, *construire avec la règle et le compas le côté du triangle équilatéral dont* ABC *est la projection sur le plan* P. (Lionnet.)

Nous résumons ici la solution que donne M. E. Jasseron, élève de spéciales à Besançon.

Concevons dans l'espace le triangle équilatéral A′B′C′ dont le triangle ABC est la projection orthogonale; le centre O′ du cercle circonscrit au triangle A′B′C′ aura pour projection le point de concours O des médianes du

triangle ABC. Ce point O est donc le centre d'une ellipse circonscrite au triangle ABC; le demi-grand axe de cette ellipse est donc égal au rayon du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. On construira donc, par un procédé bien connu, le demi-axe d'une ellipse dont on connaît le centre o, et trois points A, B, C; soit a ce demi-axe; a sera le rayon du cercle circonscrit au triangle inconnu $A'B'C'$; le côté de ce triangle équilatéral inconnu sera donc $a\sqrt{3}$, et pourra être construit *au moyen de la règle et du compas.*

1re *Remarque.* — Il nous semble essentiellement utile de constater qu'un problème est résolu par la règle et le compas, lorsque la solution définitive résulte de la combinaison d'un nombre limité de droites et circonférences graphiques, bien que le raisonnement conducteur ait pu employer comme intermédiaires des lignes plus compliquées.

2e *Remarque.* — Si une ellipse circonscrite au triangle ABC doit avoir pour centre le point O de concours des médianes ou le centre de gravité du triangle, OA est la longueur du demi-diamètre conjugué à BC, et la tangente en B coupe le diamètre OA en un point T opposé au point A relativement au centre O et tel, que $OT = 2\,OA$; cette même tangente rencontre le diamètre conjugué à OA en un point V tel, que $OV = \frac{2}{3}BC$; par suite, le demi-diamètre dirigé suivant OV a pour longueur $\frac{BC}{\sqrt{3}}$; on connaît donc les directions et longueurs d'un système de diamètres conjugués, et l'on peut déterminer les longueurs des axes par l'un quelconque des procédés connus.

Note. — M. Andry a résolu la même question à peu près de la même manière.

Question 901

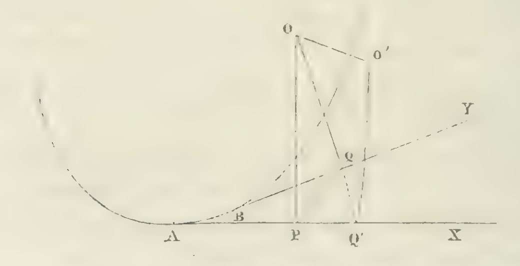
(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 45) ;

PAR M. MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Lorsqu'une ellipse en roulant sans glisser sur une droite a fait un tour entier, l'arc décrit par le foyer est égal à la circonférence ayant pour diamètre le grand axe.

On sait que la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes. Ce théorème est donc un cas particulier du suivant, dont nous trouvons l'énoncé dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 25, et que nous allons démontrer :

Lorsque d'un point O, *situé dans le plan d'une courbe plane, on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à cette courbe, la longueur d'un arc de la courbe, lieu des pieds de ces perpendiculaires, est égale à celle de la courbe engendrée par le point* O, *lié invariablement à la courbe donnée pendant que l'arc correspondant de celle-ci roule sans glisser sur une droite fixe.*



Je prends la droite AX sur laquelle roule la courbe, et je prends une tangente BY assez voisine du point A

pour que AB se confonde avec cette tangente. Soient P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les tangentes AX et BY. Il faut démontrer que $PQ = OO'$. O' étant la nouvelle position du point O, déterminé de la manière suivante : Dans le roulement, le point Q vient en un point Q' de la tangente tel que $AQ' = AB + BQ$; puis on a $O'Q' = OQ$ et perpendiculaire à AX.

Le triangle rectangle OPQ' nous donne $OP = OQ' \cos\alpha$, en négligeant les infiniment petits du premier ordre. $OP = OQ'$, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur.

Les deux triangles OPQ et $O'Q'O$ sont donc égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, donc $OO' = PQ$.

Question 902

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 45).

PAR M. A. LAISANT,
Capitaine du Génie à Nantes.

Tout cube parfait augmenté de 3, 4 *ou* 5 *unités d'un ordre quelconque n'est pas un cube parfait.*

(JOS. JOFFROY.)

Nous proposons de remplacer l'énonce ci-dessus par le suivant, plus général :

Tout cube parfait augmenté de 3, 4 *ou* 5 *unités d'ordres quelconques n'est pas un cube parfait.*

Cela revient à prouver l'impossibilité des équations

$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} = a^3 - b^3,$$

$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} + 10^{n'''} = a^3 - b^3,$$

$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} + 10^{n'''} + 10^{n^{\text{IV}}} = a^3 - b^3,$$

$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} + 10^{n'''} + 10^{n^{\text{IV}}} + 10^{n^{\text{V}}} = a^3 - b^3.$$

Or, a^2 est d'une des formes mq, $mq+1$ ou $mq-1$, b^2 également. Donc a^3-b^3 est d'une des formes mq ou $mq\pm 1$ ou $mq\pm 2$. Mais les premiers membres des équations ci-dessus sont des formes $mq+3$, $mq+4$, $mq+5$ ou $mq+6$. Il y a donc impossibilité.

Ajoutons les énoncés suivants tout à fait analogues, et dont nous laisserons au lecteur le soin de développer les démonstrations :

1° Une sixième puissance augmentée de 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 unités d'ordres quelconques ne peut donner une sixième puissance;

2° La somme de deux sixièmes puissances ne peut être égale à celle de 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 unités d'ordres quelconques;

3° Dans le système duodécimal, la différence de deux cinquièmes puissances ne peut être égale à la somme de 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 unités d'ordres quelconques;

4° Dans le système de base B, si $B-1$ est premier, la différence de deux puissances de degré $\frac{B-2}{2}$ ne peut être égale à la somme de 3, 4,..., $B-4$ unités d'ordres quelconques;

5° Dans la même hypothèse, la différence de deux puissances de degré $B-2$ ne peut être égale à la somme de 2, 3,..., $B-3$ unités d'ordres quelconques, et la somme de deux puissances du même degré ne peut être égale à celle de 3, 4,..., $B-2$ unités d'ordres quelconques.

6° Dans le système de base B, la différence de deux puissances de degré $\varphi(B-1)$ ne peut être égale à la somme de 2, 3,..., $B-3$ unités d'ordres quelconques, et la somme de deux puissances du même degré ne peut être égale à celle de 3, 4,..., $B-2$ unités d'ordres quelconques;

7° Dans le système de base B, la somme (ou la diffé-

rence) de deux puissances de degré $\frac{1}{2}\varphi(B-1)$ ne peut être égale à la somme de 3, 4,..., B — 4 unités d'ordres quelconques.

N. B. — Rappelons que, dans ce qui précède, $\varphi(x)$ représente le nombre des entiers premiers à x et non supérieurs à ce nombre.

Question 908

(voir 2e série, t. VIII, p. [illegible] et [illegible]).

PAR M. MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Soit un quadrilatère inscriptible ABCD. *Si je considère un triangle formé par trois sommets de ce quadrilatère, les pieds des perpendiculaires abaissées du quatrième sommet sur les côtés du triangle considéré sont sur une ligne droite* XY. *Cela posé, démontrer :*

1° *Que les quatre droites* XY *que l'on peut construire en groupant trois à trois les quatre sommets* A, B, C, D *se coupent en un point* K;

2° *Que ce point est un point commun aux quatre cercles des neuf points des quatre triangles, et que, par suite, si un sommet se meut sur la circonférence circonscrite au triangle formé par les trois autres, le lieu du point* K *sera le cercle des neuf points du triangle.*

(E. LEMOINE.)

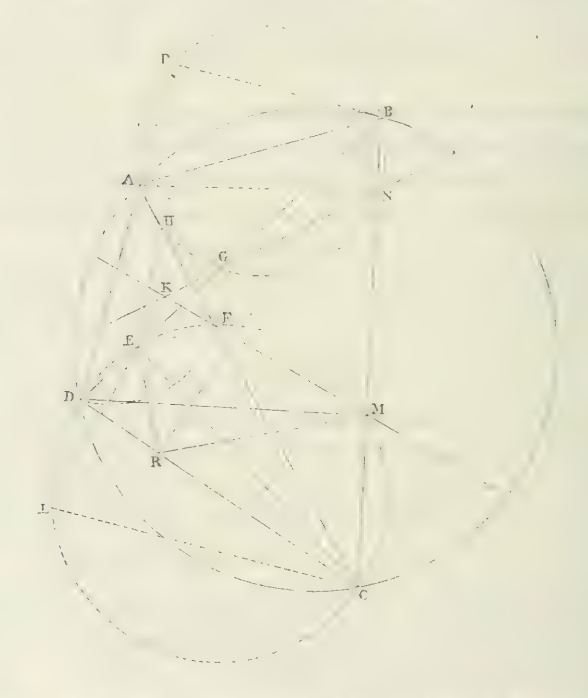
Pour démontrer ce théorème, nous ferons usage des deux lemmes suivants, qui nous feront connaître la position assez remarquable du point K.

Lemme I. — Lorsque, sur les côtés d'un quadrilatère inscrit comme cordes, on décrit des circonférences, les

quatre points d'intersection de ces circonférences sont sur une même circonférence de cercle.

Lemme II. — Soit un triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit, on a OAB = OBA, OAC = OCA, OBC = OCB; et réciproquement si l'on prend trois droites, telles que deux d'entre elles soient également inclinées sur l'un des côtés du triangle, ces trois droites se coupent en un même point, qui est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Cela posé, je vais démontrer que les quatre droites XY passent par le centre d'un cercle que je vais déterminer.



Soit le quadrilatère inscrit ABCD. Pour abaisser des perpendiculaires du point D sur les côtés du triangle

ABC, je décris sur DC comme diamètre une circonférence qui coupe la diagonale AC au point F, et la diagonale DB au point E; si sur AD comme diamètre je décris une circonférence, elle passera par le point F, et coupera la diagonale DB au point G, qui sera de même sur la circonférence dont le diamètre est AB. On voit ainsi que le quadrilatère EFGH est inscriptible. Je dis que les lignes XY passent par le centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère. En effet, l'angle KGE est égal à BGN ou au complément de ABN; l'angle KEG est égal à BGN ou au complément de LDC: or LDC = ABN; donc KGE = KEG.

On verrait de même que KHF = KFH (*).

De même, l'angle DAH = DBC; donc AH + AP = BG. et par suite l'angle KAG, qui a pour mesure $\frac{HG + HAP}{2}$, est égal à l'angle KGH, qui a pour mesure $\frac{HG}{2} + \frac{BG}{2}$.

Enfin, on a

$$KGF + NGF = 2\,dr.,$$
$$KFG + MFG = 2\,dr.$$

Or je dis que l'on a

$$NGF = GFM.$$

En effet, on a aussi

$$EGF + KGE + FGN = 2\,dr.,$$
$$MFG + HFG + KFH = 2\,dr.,$$

ou, en remplaçant KGE et KFH par leurs valeurs égales NAB et MDC, on doit avoir

$$EGF + NAB = HFG + MDC.$$

(*) Nous désignons ici par K le point d'intersection de deux quelconques des quatre lignes considérées, sans affirmer que ce point soit unique.

Or, de l'égalité des angles ABP et MDC, BAN et DCL, on tire

$$\frac{AP}{MC} = \frac{BN}{DL};$$

on a aussi

$$\frac{AH}{DE} = \frac{AP}{MC};$$

donc

$$\frac{AP + AH + BN}{MC + DE + DL} = \frac{AB}{CA}.$$

Donc la somme EFG + NAB = HFG + MDC, et, par suite, NGF = MFG; donc KGF = KFG. Les droites PH, NG, MF se coupent donc en un point unique K, qui est le centre du cercle EFGH. C. Q. F. D.

Maintenant, si je prends les pieds des hauteurs E, R, M du triangle DBC, le point K est sur le cercle qui passe par ces trois points. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que EKM et MRE sont supplémentaires.

Or EKF = 180° — 2KFE; l'angle KFE a pour mesure $\frac{1}{2}$ EF + $\frac{1}{2}$ FM.

Les lignes ER et RM étant également inclinées sur le diamètre DC, d'après un théorème connu, l'angle intérieur ERM aura pour mesure EF + FM; donc ERM = 2KFE, et, par suite,

$$EKF + ERM = 180^\circ.$$

C. Q. F. D.

Question 916

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 95);

PAR Mˡˡᵉ OLGA ERMANSKA,
Institutrice à Strasbourg.

Trouver l'enveloppe des ellipses d'aire constante dont les axes ont la même direction, ces ellipses étant concentriques.

(C. HARKEMA, de Saint-Pétersbourg.)

Je prends pour axes de coordonnées les axes communs à toutes les ellipses.

Soit $\pi\lambda^2$ la surface constante donnée, les carrés des demi-axes seront

$$a^2, \quad \frac{\lambda^4}{a^2}.$$

L'équation des ellipses sera, a désignant le paramètre variable,

$$\frac{\lambda^4}{a^2}x^2 + a^2y^2 - \lambda^4 = 0,$$

ou, comme a^2 n'est jamais nul,

$$(1) \qquad \lambda^4 x^2 + a^4 y^2 - a^2 \lambda^4 = 0.$$

J'aurai l'équation du lieu en éliminant a entre l'équation (1) et l'équation (2), dérivée de la première par rapport à a, où je supprime le facteur $2a$,

$$(2) \qquad 2a^2y^2 = \lambda^4,$$

d'où, en remplaçant a^2 par la valeur qui provient de cette équation dans l'équation (1),

$$4x^2y^2 = \lambda^4.$$

Cette dernière équation représente les deux hyperboles

équilatères conjuguées

$$xy = \frac{h^2}{2},$$

$$xy = -\frac{h^2}{2}.$$

On peut arriver géométriquement au même résultat.

Soient OA (*) la diagonale du rectangle construit sur les axes d'une des ellipses; M le point où OA coupe cette ellipse, je mène MP, MQ, parallèles à Oy et à Ox.

J'ai évidemment

$$\text{surface OPMQ} = \frac{1}{2} h^2.$$

Si maintenant je mène en M la tangente à l'ellipse, D et C étant les points où elle (la tangente) coupe Ox et Oy, j'ai, comme on voit facilement,

$$\text{DM} = \text{CM}.$$

De plus,

$$\text{surface OCD} = 2 \text{ surface OPMQ} = \text{constante}.$$

Donc DC est tangente en M à une branche d'hyperbole ayant Ox et Oy pour asymptotes : cela d'après un théorème connu.

Donc l'ellipse est tangente en M à cette même hyperbole.

Le lieu se compose donc de quatre branches d'hyperbole équilatères situées dans les angles yOx, $y'Ox$, yOx', $x'Oy'$.

On peut facilement trouver l'équation d'une de ces hyperboles.

En effet, l'équation de la branche située dans yOx est

$$xy = \text{MP.MQ} = \frac{h^2}{2}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Pour la branche située dans $y'Ox'$, on a

$$xy = (-\mathrm{MP})(-\mathrm{MQ}) = \frac{h^2}{2}.$$

Donc, enfin, le lieu se compose réellement de deux hyperboles équilatères.

Note du Rédacteur. — M. Fouret, qui nous a envoyé une solution très-simple de la même question, fait remarquer qu'on peut facilement résoudre sans plus de difficultés le problème plus général que voici :

Trouver l'enveloppe des ellipses concentriques à aire constante ayant deux diamètres conjugués communs en direction.

Note. — Nous avons reçu d'autres solutions très-bonnes de MM. Goisel; de Martres; Puibaraud, élève du lycée Napoléon; H. B., du collége Stanislas; de Capotin, du lycée de Douai; Paul Magué, du lycée de Lyon; Garet, du lycée de Clermont-Ferrand; Morel, répétiteur à Sainte-Barbe; Auguste Janin, de Grenoble (classe de M. Bernard); Willière.

Question 924

(voir 2e série, t. VIII, p. 96).

PAR M. ARTHUR MILLASSEAU,
Élève du lycée de Douai.

Par un point pris sur la développée d'une parabole, on mène les normales à la parabole. Par le point et les pieds de ces normales, on fait passer un cercle. On demande le lieu du centre de ce cercle, lorsque le point décrit la développée. (PAILLOTTE.)

Les pieds des normales à la parabole menées par un

point P(α, β) sont donnés par les intersections de la parabole

$$y^2 - 2px = 0$$

avec la courbe

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0.$$

Les y des points d'intersection sont données par

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0.$$

Cette équation doit avoir deux racines égales; donc le premier membre doit être divisible par

$$y + \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}.$$

Nous obtenons le quotient

$$y^2 - \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}\,y - \frac{4}{3}p(\alpha - p) = 0,$$

avec la condition

$$27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3.$$

Les pieds des normales sont donnés par l'intersection des deux courbes

$$y^2 - 2px = 0,$$

$$y^2 - \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}\,y - \frac{4}{3}p(\alpha - p) = 0,$$

ou par les intersections (B, C) des deux courbes

$$y^2 = 2px,$$

$$2px - \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}\,y - \frac{4}{3}p(\alpha - p) = 0.$$

Cette dernière équation est la polaire du point A d'intersection des deux tangentes aux points B et C, par

rapport à la parabole. Or le quadrilatère ABCP est inscriptible; le centre se trouve donc au milieu de AP. Si nous appelons x_0, y_0 les coordonnées du point A, les coordonnées x, y du centre seront déterminées par

$$2x = \alpha + x_0,$$
$$2y = \beta + y_0.$$

Et nous avons, pour déterminer x_0, y_0, les deux équations

$$x_0 = -\frac{2}{3}(\alpha - p),$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{1}{6}p(\alpha - p)}.$$

Pour avoir le lieu du centre, nous avons à éliminer α, β, x_0, y_0 entre les cinq équations

$$27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3,$$
$$2x = x_0 + \alpha,$$
$$2y = y_0 + \beta,$$
$$y_0 = \sqrt{\frac{1}{6}p(\alpha - p)},$$
$$x_0 = -\frac{2}{3}(\alpha - p).$$

Nous avons

$$\alpha = 2(3x - p),$$
$$2y = \beta + \sqrt{\frac{1}{2}p(2x - p)};$$

d'où

$$\beta = 2y - \sqrt{\frac{1}{2}p(2x - p)}.$$

Nous avons donc pour l'équation du lieu

$$27p\left[2y - \sqrt{\frac{1}{2}p(2x - p)}\right]^2 = 27.8(2x - p)^3.$$

Transportons l'origine au foyer de la parabole, nous aurons pour l'équation du lieu

$$16p^2y^4 - 8(p^2 + 64x^2)pxy^2 + x^2(64x^2 - p^2)^2 = 0.$$

Nous trouvons les deux courbes du troisième ordre

$$y^2 = \frac{(p + 8x)^2}{4p}x,$$
$$y^2 = \frac{(p - 8x)^2}{4p}x.$$

La première possède un point double isolé; la seconde possède un point double ordinaire. Ces deux courbes touchent l'axe des y à l'origine. Les branches infinies sont des branches paraboliques ayant pour axe l'axe des y.

Cherchons le lieu du centre du cercle passant par les pieds des normales et par le sommet.

Quand on considère les normales menées d'un point (α, β), les pieds de ces normales peuvent être donnés par l'intersection de la parabole proposée

$$y^2 = 2px$$

avec le cercle

$$x^2 + y^2 - (p + \alpha)x - \frac{\beta y}{2} = 0.$$

Les coordonnées du centre sont ici

$$x = \frac{p + \alpha}{2},$$
$$y = \frac{\beta}{4}.$$

Or le point (α, β) est sur la développée: donc

$$27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3.$$

En éliminant α et β entre ces trois équations, nous aurons le lieu décrit par le centre : ce lieu est la courbe

$$y^2 = \frac{4(x-p)^3}{27p}.$$

Cette courbe est tout à fait analogue à la développée de la parabole.

Si nous cherchons le lieu du point A, nous trouvons

$$y^2 + \frac{p}{4}x = 0,$$

c'est-à-dire une parabole située à gauche de l'axe des y et dont le paramètre est le huitième du paramètre de la parabole proposée. Nous concluons de là le théorème suivant :

Si un point se meut sur la développée et si l'on mène les normales à la parabole par ce point, le pôle de la droite qui joint les pieds des normales se meut sur une parabole homothétique de la parabole proposée et dont le paramètre est le huitième de celui de la première parabole.

Reprenons l'équation de la droite BC

$$2px - \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}\,y - \frac{4}{3}p(\alpha - p) = 0.$$

Dans cette équation, on peut considérer $(\alpha - p)$ comme une indéterminée : soit $\alpha - p = \lambda^2$. L'équation de BC devient

$$\frac{4}{3}p\lambda^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\,p\lambda y - 2px = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est

$$\frac{2}{3}py^2 + \frac{4}{3}p \cdot 2px = 0,$$

ou

$$y^2 + 4px = 0.$$

Nous avons encore une parabole située à gauche de Oy et dont le paramètre est double de celui de la parabole proposée.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Brocard, sous-lieutenant du Génie à Metz; Niebylowski, élève de l'École Normale; Prosper Pélissier, elève du collége Chaptal; Andry, élève à Sainte-Barbe; Paul Endrès, élève du lycée de Douai.

Question 934

(voir 2e série, t. VIII, p. 240);

PAR MM. BROCARD ET GRASSAT,
Sous-lieutenants du Génie à Metz.

Les centres de courbure d'une spirale d'Archimède qui correspondent à des points situés sur un même rayon vecteur appartiennent à une même ellipse.

(G. FOURET.)

Prenons pour origine le pôle de la courbe, pour axe des x l'axe polaire, et pour axe des y une droite perpendiculaire menée par l'origine.

Désignons par α l'angle que fait la droite fixe OA avec Ox; par β l'angle de la normale en un point M de la courbe avec Ox; par ρ le rayon vecteur OM, par R le rayon de courbure en M. On aura

$$x = \rho \cos\alpha - R\cos\beta,$$

$$y = \rho \sin\alpha - R\sin\beta.$$

Mais

$$\rho = a\omega,$$

$$R = a\frac{(\omega^2+1)\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2+2}.$$

et

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} - \mathrm{V},$$

V étant l'angle que fait la tangente en M avec le rayon vecteur. Si l'on désigne $\cos a$ par m et $\sin a$ par n, on aura finalement

$$x = ma\omega - a\frac{\omega^2+1}{\omega^2+2}(m\omega + n),$$

$$y = na\omega - a\frac{\omega^2+1}{\omega^2+2}(n\omega - m),$$

ou encore

$$x = \frac{a}{\omega^2+2}[m\omega - n(\omega^2+1)],$$

$$y = \frac{a}{\omega^2+2}[n\omega + m(\omega^2+1)].$$

En changeant ω en $\omega + 2\mathrm{K}\pi$, on aura les divers points cherchés. En éliminant ensuite K ou ω, on aura une courbe qui les renferme. Or, on tire de ces équations les suivantes :

$$my - nx = \frac{a(\omega^2+1)}{\omega^2+2},$$

$$mx + ny = \frac{a\omega}{\omega^2+2}.$$

Par un changement des axes de coordonnées, on peut ramener ces équations à prendre les formes

$$\mathrm{X} = \frac{a(\omega^2+1)}{\omega^2+2},$$

$$\mathrm{Y} = \frac{a\omega}{\omega^2+2}.$$

Éliminant ω, on a l'ellipse

$$\mathrm{Y}^2 = (\mathrm{X} - a)(a - 2\mathrm{X}).$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE MILITAIRE (ANNÉE 1869).

Composition mathématique.

1° Énoncer et démontrer le théorème qui donne la surface engendrée par une ligne brisée régulière, plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre, ainsi que le théorème qui donne la mesure de la zone sphérique.

2° Calculer la surface de la zone à une base engendrée par un arc de $23° 27' 24'', 8$, sachant que la circonférence d'un grand cercle de la sphère à laquelle appartient la zone vaut 40 000 000 de mètres.

3° On donne un demi-cercle terminé par le diamètre AB, un point P sur ce diamètre, et l'on demande de mener par ce point P une droite qui divise le demi-cercle en deux parties telles, que, si l'on fait tourner la figure autour du diamètre AB, les volumes engendrés par chacune de ces parties soient équivalents.

Épure.

1° Un prisme droit a pour base un hexagone régulier. Le côté de la base vaut 31 millimètres, et la hauteur du prisme est quintuple du côté de la base. Une face latérale coïncide avec le plan horizontal de projection, les arêtes latérales faisant avec la ligne de terre un angle de 30 degrés. On demande de construire les projections horizontale et verticale de ce prisme.

2° Soit O le point milieu de celle des deux arêtes laté-

rales supérieures qui est le plus en avant du plan vertical de projection. Considérez les points situés sur les arêtes latérales et qui sont à la même distance du point O, distance égale au double du côté de la base; joignez chacun de ces points au point voisin situé sur l'arête suivante: vous obtiendrez ainsi une ligne polygonale tracée sur la surface du prisme. Cela posé, on demande de construire les projections de cette ligne.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Théorie mathématique des Opérations financières, par Hippolyte Charlon. — 1 vol. grand in-8, Paris, Gauthier-Villars, 1869. Prix : 7 fr. 50 c.

La science de l'*Actuary*, qui a été cultivée en Angleterre, depuis le commencement de ce siècle, par un grand nombre d'hommes éminents, et qui a pris dans ces derniers temps une extension considérable, est encore peu répandue en France : son nom même n'a pas d'équivalent dans notre langue. Elle a pour objet l'application des mathématiques aux opérations financières, aux assurances de toute espèce, à la statistique morale et matérielle, et généralement à toutes les questions d'économie sociale, dont les éléments sont assez nettement définis pour supporter une analyse rigoureuse. Elle devait naître et se développer dans le pays classique de la haute banque, des grandes affaires, des speculations à longue portée; mais elle s'acclimatera sans doute parmi nous, à mesure que nous avancerons dans la voie du progrès économique, où nous sommes définitivement entrés. On doit donc savoir gré aux personnes qui s'efforcent de nous initier à des théories dont les applications deviennent chaque jour plus fréquentes.

M. Charlon a écrit en quelque sorte le premier chapitre de la science dont nous venons d'esquisser le programme : il s'est

borne à exposer, sous une forme élégante et rapide, la théorie des opérations financières. Il a eu soin d'ailleurs d'appliquer ses formules à de nombreux exemples, qui en font parfaitement comprendre le sens, et il a rendu ainsi un véritable service aux calculateurs de profession. Mais nous nous bornerons à signaler ici deux questions qui donnent lieu à d'intéressants exercices d'analyse mathématique, et qui, par conséquent, sont de nature à exciter plus particulièrement la curiosité des lecteurs habituels de ce journal. Nous voulons parler de la théorie des emprunts par obligations, et du calcul de la parité des valeurs.

On sait que les emprunts contractés par le Crédit foncier, les municipalités des grandes villes, les compagnies de chemins de fer et les sociétés industrielles, sont ordinairement réalisés par des émissions de titres, appelés *obligations*, qui rapportent un intérêt fixe, et qui sont amortissables, par voie de tirage au sort, à un prix déterminé, dans un délai déterminé. Ces obligations, qui sont recherchées surtout par les petits capitalistes, constituent aujourd'hui une part considérable de la fortune publique; elles sont, chaque jour, l'objet de transactions très-importantes. Mais, parmi les personnes qui consacrent leurs épargnes à acheter des obligations, combien y en a-t-il qui se rendent un compte exact de ce qu'elles font, qui sachent exactement à quel taux elles placent leur argent, qui aient de bonnes raisons pour entrer dans telle valeur plutôt que dans telle autre? On se guide habituellement soit par les conseils des journaux financiers, soit sur les cours de la Bourse. Mais les journaux financiers ne passent pas pour être toujours désintéressés, et, s'il est vrai que les cours de la Bourse, pour les valeurs qui sont dégagées de tout *aléa*, tendent constamment, à une époque donnée, à se rapprocher des prix moyens qui résulteraient du taux courant de l'intérêt à la même époque, il n'est pas moins vrai que toutes les valeurs subissent des oscillations purement fortuites, dont l'amplitude est beaucoup plus grande qu'on ne serait tenté de le croire. Le seul guide qui ne trompe jamais est le calcul, quand on sait l'interroger. Pour les emprunts dont l'amortissement fonctionne aux échéances

des coupons d'intérêt, le calcul est assez simple, bien qu'on ne puisse pas le regarder comme tout à fait élémentaire. Il ne se complique pas beaucoup lorsque, pour solliciter la faveur d'une certaine catégorie de souscripteurs, l'emprunteur attribue, à chaque tirage, un certain nombre de lots aux premiers numéros sortants; la valeur d'une obligation, à un âge donné, s'augmente alors de la somme des lots qui restent à échoir à partir de cet âge, divisée par le nombre des obligations vivantes; toutes les sommes devant être, bien entendu, réduites à l'époque du calcul, d'après le taux courant de l'intérêt à cette époque. Mais la plupart des emprunts des compagnies de chemins de fer présentent une difficulté spéciale, qui provient de ce que les coupons d'intérêt sont payables semestriellement, tandis que l'amortissement ne fonctionne qu'annuellement. M. Charlon, qui a approfondi cette question, est parvenu, par une voie un peu détournée, à des formules que nous croyons nouvelles : si la démonstration laisse quelque chose à désirer, sous le rapport de la simplicité, il nous a paru, après un examen attentif, que les résultats étaient exacts, et c'est évidemment l'essentiel.

En parlant de l'*âge* et de la *vie* des obligations, nous avons touché à l'un des points les plus curieux du livre. La vie d'une obligation est le temps qui s'écoule entre son émission et son amortissement; son âge, à une époque donnée, est le temps compris entre son émission et cette époque. On devine, d'après cela, ce qu'il faut entendre par la *vie moyenne* et par la *vie probable* d'une obligation à un âge donné, et l'on conçoit qu'on puisse se proposer, à l'égard des obligations, tous les problèmes auxquels donnent lieu les combinaisons variées de rentes viagères et d'assurances sur la vie humaine. La seule différence qu'il y ait entre ces deux sortes de problèmes est que la loi de la mortalité des personnes assurées n'est connue que par des tables empiriques, tandis que la loi de l'amortissement des obligations est exprimable par une formule rigoureuse; ce qui donne aux questions financières un plus vif intérêt mathématique. Il faut reconnaître toutefois que ces considérations sont plus curieuses qu'utiles : aussi M. Charlon s'est-il borné à les

indiquer. Ce qu'il y a de plus important à noter, au point de vue pratique, c'est qu'on ne peut pas faire usage de la vie moyenne ou de la vie probable (selon une erreur trop répandue) pour calculer la valeur d'une obligation, d'après un taux assigné : il faut recourir pour cela à un autre élément que M. Charlon appelle la *vie mathématique*, et qu'il donne le moyen de déterminer.

Quant au calcul de la parité des valeurs, c'est le problème qu'ont journellement à résoudre les *arbitragistes*. On appelle *parité* d'une valeur A, par rapport à une autre valeur B, le prix que devrait coûter A d'après le taux correspondant au prix connu de B. La partie difficile du problème consiste à calculer le taux correspondant au prix connu de la valeur B : le résultat doit être obtenu avec une grande précision, parce que de très-légères variations dans ce résultat en produiraient d'assez fortes dans le prix des valeurs qui en dépendent. M. Charlon donne pour cet objet des formules et des méthodes qui ne laisseraient rien à désirer si les tables qu'il reproduit à la fin de son ouvrage étaient disposées de manière à faciliter les interpolations. Malgré cette légère imperfection, cet ouvrage se recommande également aux praticiens de la finance, et aux personnes qui s'occupent, par goût, des questions intéressantes que soulèvent la constitution et la circulation de la fortune mobilière d'un grand pays.

Ch. Simon.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Session du 5 juillet 1869.

1re *Question*. — Trouver une fonction z de deux variables x et y qui se réduit à zéro pour $x = a$ et qui

satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$$ax^4 \frac{dz}{dx} + (x^4 z + ax^3 y - ax^2 y^2)\frac{dz}{dy} = 2ax^2 yz - 2a^2 y^3.$$

2° *Question.* — Trouver le mouvement d'un point matériel sollicité par deux forces dirigées vers un centre fixe, l'une attractive et variant proportionnellement à la distance, l'autre répulsive et variant en raison inverse du cube de la distance.

On appliquera les formules en supposant la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial.

QUESTIONS.

949. Trouver toutes les courbes planes pour lesquelles la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante. On compte la normale du point de la courbe à une droite fixe donnée, et le rayon vecteur du point de la courbe à un point fixe pris pour pôle.

Les coniques donnent une solution particulière.

(GENOCCHI.)

950. Démontrer que le produit des deux séries

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2}\,\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{a+4}\,\frac{1.3}{2.4}\,x^2 + \frac{1}{a+6}\,\frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^3 + \ldots,$$

$$1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{1.3}{2.4}\,x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^3 + \ldots$$

est

$$\frac{1}{a}\left[1 + \frac{a+1}{a+2}\,x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}\,x^2 + \frac{(a+1)(a+3)(a+5)}{(a+2)(a+4)(a+6)}\,x^3 + \ldots\right].$$

(HERMITE.)

951. Démontrer la formule

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots.$$

(Laisant.)

952. Démontrer la formule

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots.$$

(Laisant.)

953. 1° Trouver deux entiers n et p ($n < p$) tels, qu'on ait

$$1 + 2 + \ldots + n = (n + 1) + \ldots + p.$$

Ce problème revient à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver un entier tel, que son carré augmenté de 1 soit égal au double d'un carré ;

Ou

Trouver deux entiers consécutifs tels, que la somme de leurs carrés soit égale à un carré.

2° Trouver deux entiers n et p tels, qu'on ait

$$1 + 2 + \ldots + n = p^2.$$

Ce problème revient à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver un entier tel, que son carré diminué de 1 soit égal au double d'un carré ;

Ou

Trouver deux entiers consécutifs tels, que la somme de leurs carrés soit égale à un carré augmenté de 1.

(Laisant.)

SUR LA MÉTHODE D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE DE M. BELLAVITIS (CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES)

(suite et fin, voir 2e série, t. VIII, p. 289),

PAR M. HOÜEL,
Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

---

24. Maintenant que nous avons exposé tous les principes du calcul des équipollences, nous pouvons donner quelques applications à la solution graphique des problèmes de géométrie.

I. *En un point donné* A, *construire un triangle* AXY, *semblable à un triangle donné, et dont les sommets* X, Y *soient aux distances f, g d'un point donné* O.

Connaissant la forme du triangle AXY, on connaît par conséquent le rapport

$$\frac{\mathrm{AY}}{\mathrm{AX}} = ni^{\alpha},$$

tant par sa grandeur n que par son angle XAY $= \alpha$, et la Règle I nous donnera les équipollences

$$\mathrm{OA} + \mathrm{AX} = \mathrm{OX}, \quad \mathrm{OA} + ni^{\alpha}.\mathrm{AX} = \mathrm{OY}.$$

En éliminant AX, il vient

$$\mathrm{OY} - ni^{\alpha}.\mathrm{OX} = \mathrm{OA} - ni^{\alpha}.\mathrm{OA}.$$

Le second membre de cette équipollence deviendra OU, si l'on construit la droite AU $= ni^{\alpha}$. AO, ce qui veut dire que le triangle AOU est semblable au triangle donné (au-

quel AXY doit être semblable). Ensuite, l'équipollence

$$OY - ni^{\alpha}.OX = OU,$$

comparée à l'identité

$$OY - UY = OU,$$

nous montre que sur la droite OU on devra construire un triangle OUY, dont on connaît les longueurs g, nf des deux côtés OY et $UY = nf = f\,\frac{AU}{AO}$. Ayant trouvé Y, on achèvera facilement le triangle AYX, directement semblable à AUO.

Plusieurs autres problèmes se résolvent comme le précédent, en les ramenant à une équipollence trinôme, qui contient deux inconnues.

II. *Couper deux droites données* AD, BE *par une troisième* XY, *de manière que les segments* AX, BY, XY *soient dans le même rapport que les lignes* AD, BE *et l'unité de longueur.*

Nous aurons

$$AX = r.AD, \quad BY = r.BE, \quad XY = r.i^{u},$$

u étant l'inclinaison inconnue de XY. En substituant ces valeurs dans l'équipollence

$$AX + XY + YB = AB,$$

il vient

$$r.AD + r.i^{u} - r.BE = AB.$$

Si l'on mène DU équipollente à EB, cette relation prend la forme trinôme

$$\frac{1}{r}.AB - i^{u} = AD - BE = AU.$$

En comparant celle-ci à l'identité

$$AV - VU = AU,$$

elle nous indique de couper en V la droite AB par un arc décrit du centre U, et d'un rayon égal à l'unité de longueur, après quoi l'on aura

$$\frac{AB}{AV} = \frac{AX}{AD},$$

de telle sorte que BX sera parallèle à VD, et XY parallèle à $VU = i^u$.

III. *Inscrire dans un cercle un quadrilatère* XYZT, *de manière que les trois côtés* XY, YZ, ZT *passent respectivement par les points* A, B, C, *et que le quatrième côté* TX *ait une longueur donnée.*

Soit OH le rayon que nous prendrons pour origine des inclinaisons, et supposons les sommets du quadrilatère déterminés par les relations

$$OX = i^x.OH, \quad OY = i^y.OH, \quad OZ = i^z.OH, \quad OT = i^t.OH.$$

La condition pour que AXY soit une droite est donnée par l'équipollence

$$OA - i^x.OH = p(OA - i^y.OH).$$

Au moyen de sa conjuguée

$$\text{conj}OA - i^{-x}.OH = p(\text{conj}OA - i^{-y}.OH),$$

on éliminera p, ce qui donnera

(1) $$i^x = \frac{OA - i^y.OH}{OH - i^y.\text{conj}OA}.$$

On trouvera de même

(2) $$i^y = \frac{OB - i^z.OH}{OH - i^z.\text{conj}OB},$$

(3) $$i^z = \frac{OC - i^t.OH}{OH - i^t.\text{conj}OC}.$$

En désignant maintenant par δ l'arc TX, on aura

$$(4) \qquad i^t = i^{x-\delta}.$$

On exécutera les substitutions de ces équipollences les unes dans les autres, en faisant les constructions suivantes :

$$(5) \qquad AA_1 = -OB, \quad HH_1 = -\frac{OA . \operatorname{conj} OB}{OH},$$

après quoi l'équipollence (2) donnera, par la substitution dans (1),

$$i^x = \frac{OA_1 + i^z . OH_1}{\operatorname{conj} OH_1 + i^z . \operatorname{conj} OA_1}.$$

En combinant cette dernière avec (3), et posant

$$(6) \qquad A_1 A_2 = \frac{OH_1 . OC}{OH}, \quad H_1 H_2 = \frac{OA_1 . \operatorname{conj} OC}{OH},$$

on aura

$$i^x = \frac{OA_2 - i^t . OH_2}{\operatorname{conj} OH_2 - i^t . \operatorname{conj} OA_2}.$$

Substituant enfin la valeur (4), et faisant

$$(7) \qquad OW = OH_2 + i^\delta . \operatorname{conj} OH_2, \quad OU = \frac{OH . OW}{\operatorname{conj} OA_2},$$

on aura

$$i^x . OH + i^{\delta - x} . \frac{OH . OA_2}{\operatorname{conj} OA_2} = OU.$$

Cette équipollence, comparée avec la relation

$$OX + XU = OU,$$

nous apprend que le point X s'obtiendra en coupant le cercle donné par un autre cercle égal, ayant pour centre U.

Les équipollences (5), (6), (7) indiquent clairement la

construction qu'il faut faire. On mènera AA_1 équipollent à BO ; on construira le triangle OAK inversement semblable à OHB, et l'on mènera $HH_1 = KO$; on formera les triangles OH_1L_1, directement semblable à OHC, et OA_1K_1 inversement semblable au même triangle OHC, et l'on mènera $A_1A_2 = OL_1$, $H_1H_2 = OK_1$. Soit la corde HI du cercle égale au côté TX du quadrilatère cherché. Menons OW perpendiculaire à cette ligne HI et ayant, par conséquent, pour inclinaison $\frac{1}{2}\delta$, et coupons-la de telle manière que H_2W soit égal à OH_2. Enfin, ayant construit OWU inversement semblable à OA_2H, la droite perpendiculaire sur le milieu de OU coupera le cercle donné au sommet X du quadrilatère cherché.

La direction du rayon OH est arbitraire. En la faisant coïncider avec OC, les triangles OHC, OH_1L_1, OA_1K_1 se réduisent à trois droites coupées proportionnellement.

25. Si O est un point fixe et que OM dépende d'une variable *réelle* t au moyen de l'équipollence

$$OM = \varphi(t),$$

tous les points M formeront une ligne.

L'équipollence comprend les divers systèmes de coordonnées. Ainsi, si

$$OM = x + yi,$$

et que x et y soient des fonctions de t, ou bien qu'elles soient liées entre elles par une équation, on aura le système des coordonnées orthogonales. Si

$$OM = ri^u,$$

r et u seront les coordonnées polaires. Du reste, OM pourra être représentée de toute autre manière ; ainsi.

par exemple, la relation

$$\text{OM} = at + bi^t$$

exprime évidemment la génération d'une cycloïde;

$$\text{OM} = ai^t + bi^{2t},$$

celle d'une épicycloïde.

Soit M′ un point de la courbe infiniment voisin de M, et correspondant à la valeur $t + dt$ de la variable indépendante. La droite

$$\text{MM}' = \text{OM}' - \text{OM} = d.\text{OM}$$

aura pour direction-limite celle de la tangente. Si l'on multiplie $d.$OM par un facteur réel quelconque p, l'équipollence

$$\text{MT} = p.d\text{OM},$$

ou, si l'on veut,

$$\text{MT} = p \cdot \frac{d.\text{OM}}{dt}$$

représentera un point quelconque de la tangente, en donnant successivement à la variable p toutes les valeurs réelles. Si l'on ne veut considérer que la direction, on pourra supposer, pour plus de simplicité, $p = 1$.

Si l'on augmente l'inclinaison de la tangente d'un angle droit, en multipliant la valeur de MT par i, on aura l'équation de la normale

$$\text{MN} = ip.d\text{OM}, \quad \text{ou} \quad \text{MN} = ip \cdot \frac{d\text{OM}}{dt}.$$

Ainsi, l'équation du cercle étant

$$\text{OM} = ai^t,$$

celle de la tangente sera [à cause de $d.i^t = i\,dt.i^t$ (n° 26)]

$$\text{MT} = ia.i^t,$$

et celle de la normale

$$MN = i^2 a . i^t = - OM.$$

26. Pour montrer quelques applications des équipollences aux courbes, considérons la relation

$$OM = \cos t . OA + \sin t . OB,$$

qui appartient à une ellipse rapportée à deux demi-diamètres conjugués OA, OB. La tangente au point M est donnée par la droite MT, qui est la dérivée de OM par rapport à la variable t, savoir :

$$MT = \frac{d . OM}{dt} = - \sin t . OA + \cos t . OB.$$

Si l'on cherche le point Q où la tangente rencontre OA prolongé, il faudra prendre la somme géométrique de OM et de $- MT \cdot \frac{\sin t}{\cos t}$, ce qui donne

$$OQ = \cos t . OA + \sin t . OB + \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot OA - \sin t . OB$$
$$= \frac{1}{\cos t} OA.$$

La droite

$$ON = - \sin t . OA + \cos t . OB,$$

équipollente à la tangente précédente MT, donne un autre point N de l'ellipse, en changeant seulement, dans l'expression de OM t en $\frac{\pi}{2} + t$. Les droites OM, ON sont aussi deux diamètres conjugués.

Il est facile de s'assurer que l'on a

$$OM^2 + ON^2 = OA^2 + OB^2.$$

Par conséquent, les deux points F, F_1, tels que l'on ait

$$OF_1 = -OF, \quad OF^2 = OM^2 + ON^2,$$

restent toujours les mêmes, quels que soient les demi-diamètres conjugués OM, ON que l'on considère. L'équipollence précédente donne

$$ON^2 = OF^2 - OM^2 = (OF - OM)(OF + OM)$$
$$= MF(OM - OF_1) = MF.F_1M,$$

de laquelle on conclut

$$gr^2 ON = gr MF . gr F_1 M,$$
$$2 incl ON = incl MF + incl F_1 M;$$

et comme ON est parallèle à la tangente en M, il s'ensuit de là que cette tangente sera bissectrice de l'angle formé par un rayon vecteur MF et le prolongement de l'autre F_1M. En outre, le carré du demi-diamètre ON, conjugué de OM, est égal au produit des deux rayons vecteurs MF, MF_1.

Pour déterminer les foyers, connaissant deux diamètres conjugués, on pourra construire

$$OF = \sqrt{OA\left(OA + \frac{OB^2}{OA}\right)},$$

c'est-à-dire que, ayant fait le triangle OBD directement semblable à OAB, et mené la droite AE = OD, OF sera une moyenne proportionnelle entre OA et OE = OA + OD, et partagera l'angle AOE en deux parties égales.

On pourrait encore prendre la formule

$$OF = \sqrt{(OA + i.OB)(OA - i.OB)},$$

c'est-à dire, du point A mener AK = − AK_1, égales et perpendiculaires à OB, puis construire la moyenne géométrique

$$OF = \sqrt{OK.OK_1}.$$

27. Si u est exprimé en parties de l'angle droit, on aura

$$\cos u = \frac{i^u + i^{-u}}{2}.$$

Mais si l'angle est exprimé en parties du rayon, alors

$$\cos t = \frac{i^{\frac{2t}{\pi}} + i^{-\frac{2t}{\pi}}}{2},$$

ou, à cause de $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

M. Bellavitis simplifie la notation en posant $\varepsilon = e^i$. Malgré l'avantage que présente cette simplification dans les calculs, nous conserverons ici la notation habituelle, pour nous écarter le moins possible des usages reçus. Ainsi e^{it} ou ε^t est un *coefficient d'inclinaison* comme i^u, avec cette différence que l'unité de u est l'angle droit, et celle de t l'arc égal au rayon.

Le second membre de l'équipollence

$$\mathrm{OM} = \cos t.\mathrm{OA} + \sin t.\mathrm{OB}$$

peut se développer ainsi

$$\frac{1}{2}(\mathrm{OA} - i.\mathrm{OB})e^{it} + \frac{1}{2}(\mathrm{OA} + i.\mathrm{OB})e^{-it}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{OK}.e^{it} + \frac{1}{2}\mathrm{OK}_1.e^{-it},$$

ce qui fait voir que l'ellipse peut s'engendrer à la manière d'une hypocycloïde, au moyen des deux rotations opposées e^{it}, e^{-it}.

28. Avant d'établir les formules générales relatives aux courbes, il ne sera peut-être pas inutile d'étudier

quelques-unes des propriétés de la cycloïde, représentée par l'équipollence

$$(1)\qquad \mathrm{OM} \simeq t - ie^{it}.$$

En prenant la dérivée par rapport à t, on a, pour la tangente à la cycloïde,

$$(2)\qquad \mathrm{MT} \simeq 1 + e^{it}.$$

On a, pour une portion de la normale,

$$\mathrm{MN} \simeq i.\mathrm{MT} \simeq i + ie^{it},$$

ce qui nous donne

$$\mathrm{ON} \simeq \mathrm{OM} + \mathrm{MN} \simeq t + i.$$

De même que $\mathrm{OC} \simeq t$ donne la position du centre du cercle générateur, de même on aura

$$\mathrm{CN} \simeq \mathrm{ON} - \mathrm{OC} \simeq i;$$

donc la normale passe par le point N, où le cercle générateur touche la base DB.

On obtient un autre point R de la normale en posant

$$\mathrm{OR} \simeq \mathrm{OM} + p.\mathrm{MN} \simeq t - ie^{it} + pi(1 + e^{it}).$$

Pour que cette valeur donne le point d'intersection de cette normale avec la normale infiniment voisine, il faut que le point R ne change pas lorsqu'on donne à t un accroissement infiniment petit ω, pourvu que l'on donne en même temps à p un accroissement convenable ϖ. On doit donc avoir

$$(1 + e^{it} - pe^{it})\omega + i(1 + e^{it})\varpi \simeq 0.$$

Tirant de là la valeur de $\frac{\varpi}{\omega}$, laquelle, étant réelle, devra

être égale à sa propre conjuguée, il vient

$$\frac{\varpi}{\omega} = \frac{pe^{it} - e^{it} - 1}{i(1 + e^{it})} = \frac{pe^{-it} - e^{-it} - 1}{-i(1 + e^{-it})},$$

d'où

$$-ip + i + ie^{-it} - ipe^{it} + ie^{it} + i$$
$$= ip - i - ie^{it} + ipe^{-it} - ie^{-it} - i,$$

ce qui nous donne

$$p = 2.$$

Donc le rayon de courbure MR est double de la normale MN.

Le lieu des centres de courbure, c'est-à-dire la développée de la cycloïde, est représentée par

$$\mathrm{OR} = t + ie^{it} + 2i,$$

et est une cycloïde égale à la cycloïde primitive

$$\mathrm{OM} = t - e^{it}.$$

Si de chaque point M de la cycloïde on mène la droite MS, formant avec MR un angle donné α, et ayant avec MR un rapport donné a, c'est-à-dire si l'on prend

$$\mathrm{MS} = ae^{i\alpha}.\mathrm{MR},$$

il viendra

$$\mathrm{OS} = t - ie^{it} + 2aie^{i\alpha}(1 + e^{it}) = 2aie^{i\alpha} + t + (2ae^{i\alpha} - 1)ie^{it},$$

et par conséquent la courbe S est aussi engendrée par la composition du mouvement progressif, exprimé par le terme t, avec un mouvement rotatoire de rayon constant $2ae^{i\alpha} - 1$. Si $a = \cos\alpha$, la courbe S devient une cycloïde ordinaire, et elle est une *développée imparfaite* de la cycloïde M.

Si la cycloïde M se meut parallèlement à la base, elle aura pour expression

(3) $$\mathrm{OM} = \tau + t - ie^{it},$$

τ étant un paramètre de position. Pour trouver les trajectoires orthogonales de toutes ces cycloïdes, observons que la même équation (3) représentera aussi la trajectoire cherchée, si l'on détermine t en fonction de τ, de manière à particulariser dans chaque cycloïde le point où celle-ci est coupée par la trajectoire. La tangente à la trajectoire sera, par suite, représentée par la dérivée

$$\frac{d\tau}{dt} + 1 + e^{it},$$

et celle-ci doit être perpendiculaire à la tangente $1 + e^{it}$ de chaque cycloïde; d'où l'on conclut que

$$\frac{d\tau}{dt} = -2,$$

et, partant,

$$\tau = C - 2t.$$

Donc toutes les trajectoires orthogonales sont exprimées par l'équipollence

$$OM = C - t - ie^{it},$$

et ce sont d'autres cycloïdes égales à la proposée.

La dérivée de l'arc de cycloïde est

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}\,MT &= \sqrt{MT \, . \, \mathrm{conj}\, MT} = \sqrt{(1 + e^{it})(1 + e^{-it})} \\ &= e^{\frac{1}{2}it} + e^{-\frac{1}{2}it} = 2\cos\frac{t}{2}\cdot\end{aligned}$$

29. Quelle que soit la fonction OM qui détermine une courbe, nous pourrons déterminer la développée par les calculs suivants. dOM est la direction de la tangente; par conséquent, le rayon de courbure

$$MR = \frac{i}{\lambda}\cdot d\,OM$$

est une position de la normale, et la développée, comme enveloppe de toutes les normales, sera donnée par la relation

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\, d\mathrm{OM},$$

pourvu que λ soit une fonction du t contenu dans OM, telle que MR devienne tangente à la développée au point R. Pour cette raison la ligne

$$d\mathrm{OR} = d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\cdot d^2\mathrm{OM} - \frac{i\,d\lambda}{\lambda^2}\cdot d\mathrm{OM}$$

doit être parallèle à la ligne $i.d\mathrm{OM}$. En multipliant par $\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}$, on voit que

$$d\mathrm{OM}\,.\,\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\cdot \mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}\,.\,d^2\mathrm{OM}$$

devient parallèle à i. En ajoutant donc à cette expression sa conjuguée, on aura

$$2\,d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\left(\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM} - d\mathrm{OM}\ \mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM}\right) = 0.$$

On obtient ainsi la valeur de λ, d'où l'on déduit que

$$\mathrm{MR} = \frac{2(d\mathrm{OM})^2.\,\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}\,.\,\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM} - \mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}\,.\,d^2\mathrm{OM}}.$$

La valeur de λ qu'il faut substituer dans $\mathrm{MR} = \frac{i}{\lambda}\, d\mathrm{OM}$ peut se tirer encore du développement de

$$\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} = l + i\lambda,$$

parce que cette supposition rend identiquement nulle l'expression

$$2 + \frac{i}{\lambda}\left(\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} - \frac{\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM}}{\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}\right).$$

30. Si, outre la ligne

$$MT = \frac{d\,OM}{dt},$$

on construit la ligne

$$MU = \frac{d^2 OM}{dt},$$

et qu'on abaisse UL perpendiculaire sur MT, on aura

$$LU = i\lambda . MT,$$

et, par suite, le rayon de courbure est

$$MR = \frac{MT^2}{UL}.$$

Le rayon de courbure peut aussi se trouver en cherchant le cercle qui a un contact du second ordre avec la courbe M. Un point N de ce cercle sera représenté par

$$ON = OR + e^{iu} . RM.$$

En prenant la dérivée, nous devrons supposer OR et RM constants, et faire ensuite $u = 0$. Nous aurons ainsi

$$\frac{d\,ON}{du} = i . RM, \quad d^2 ON = (i\,d^2 u - du^2) . RM,$$

quantités que nous devrons égaler aux différentielles dM, d^2M. En les divisant l'une par l'autre il vient

$$\frac{d^2 OM}{d\,OM} = \frac{d^2 u}{du} + i\,du,$$

d'où il s'ensuit que le rayon de courbure RM sera donné par la relation

$$d\,OM = i\,du . RM,$$

ce qui coïncide avec la relation déjà trouvée $MR = \frac{i}{\lambda} d\,OM$ puisque $du = \lambda$.

Quelquefois on emploiera avec avantage l'équipollence

$$OM = \int e^{i\theta} ds,$$

θ étant l'inclinaison de la tangente. D'après cette relation, on a

$$\frac{d^2 OM}{d OM} = \frac{d^2 s}{ds} + i\,d\theta.$$

Donc le rayon de courbure est

$$MR = i\frac{ds}{d\theta}e^{i\theta}.$$

Si l'on veut rapporter la courbe à des coordonnées orthogonales, on posera

$$OM = x + iy,$$

et le rayon de courbure sera généralement déterminé par l'expression

$$MR = \frac{2\,\mathrm{gr}(d OM)^2 . d OM}{d OM . \mathrm{conj}\, d^2 OM - \mathrm{conj}\, d OM . d^2 OM}$$
$$= \frac{(dx^2 + dy^2)(dy - i\,dx)}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}.$$

31. Déterminons la courbe P *parallèle* à la courbe donnée M, c'est-à-dire ayant avec elle toutes ses normales MP communes.

Le point P appartenant à la normale, on aura

$$OP = OM + ip . d OM.$$

En outre, la tangente en P, qui est déterminée de direction par la relation

$$d OP = d OM + ip . d^2 OM + i dp . d OM,$$

doit être parallèle à la tangente dOM. En multipliant

par conj dOM, nous aurons

$$pi.\mathrm{conj}\,d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM} + i\,dp.d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\,d\mathrm{OM}$$

parallèle à dOM.conj dOM, c'est-à-dire d'inclinaison nulle, et partant équipollente à sa propre conjuguée

$$-\,pi.d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\,d^2\mathrm{OM} - i\,dp.\mathrm{conj}\,d\mathrm{OM}.d\mathrm{OM}.$$

On en conclut

$$-\frac{2\,dp}{p} = \frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} + \mathrm{conj}\,\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}},$$

et, en intégrant,

$$p = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\,d\mathrm{OM}}}.$$

Donc la distance entre les deux courbes est

$$\mathrm{MP} = \mathrm{C}i.\sqrt{\frac{d\mathrm{OM}}{\mathrm{conj}\,d\mathrm{OM}}},$$

et, par suite, elle est de grandeur constante, et les courbes sont vraiment parallèles.

Supposons plus généralement que MP forme avec la tangente un angle constant α, et que la tangente en P doive être encore parallèle à la tangente en M. Prenons l'équipollence

$$d\mathrm{OM} = e^{i\theta}ds.$$

On aura

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OM} + pe^{i(\alpha+\theta)}ds;$$

et le parallélisme de

$$d\mathrm{OP} = e^{i\theta}ds + pe^{i(\alpha+\theta)}(d^2s + i\,ds\,d\theta) + e^{i(\alpha+\theta)}dp\,ds$$

et de

$$d\mathrm{OM} = e^{i\theta}ds$$

donnera

$$pe^{i\alpha}(d^2s + i\,ds\,d\theta) + e^{i\alpha}dp\,ds$$
$$= pe^{-i\alpha}(d^2s - i\,ds\,d\theta) + e^{-i\alpha}dp\,ds,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\rho ds = Ca^{-\theta},$$

C étant une constante, et $a = e^{\cot \alpha}$. Par conséquent,

$$\text{MP} = Ca^{-\theta} e^{\iota(\alpha+\theta)}.$$

Donc toutes les droites MP qui sont coupées sous un angle égal et constant par les deux courbes M et P, sont respectivement équipollentes aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique.

32. Déterminer la direction de la droite MP, qui, partant du point M d'une courbe, coupe en deux parties égales la corde infiniment petite parallèle à la tangente en M.

Ce problème est le dernier de la *Géométrie de position* (p. 477 et suiv.). Il a été résolu par M. Bellavitis, dans son Mémoire intitulé *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica*, Padoue, 1835, avant la publication des solutions de MM. Transon (1841) et Dupin (1848).

Soient N, L les deux points de la courbe correspondants à $t + \omega$ et à $t - \varpi$. On aura

$$\text{ON} = \text{OM} + \omega . \text{D}_t\text{OM} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \text{D}_t^2\text{OM} + \ldots,$$

$$\text{LN} = (\omega + \varpi) . \text{D}_t\text{OM} + \frac{\omega^2 - \varpi^2}{2} \cdot \text{D}_t^2\text{OM} + \frac{\omega^3 + \varpi^3}{6} \cdot \text{D}_t^3\text{OM} + \ldots;$$

et, pour que cette corde soit parallèle à la tangente D_tOM, il faudra qu'il en soit de même de la droite

$$3(\omega - \varpi)\,\text{D}_t^2\text{OM} + (\omega^2 - \omega\varpi + \varpi^2)\,\text{D}_t^3\text{OM} + \ldots,$$

qui, multipliée par la quantité réelle $\frac{1}{6}(\omega + \varpi)$, et

ajoutée géométriquement à la droite $(\omega + \varpi)D_t OM$, donne la droite LN. Les accroissements ω, ϖ devant être infiniment petits, il faudra que $\omega - \varpi$ soit infiniment petit du second ordre, comme l'est $\omega^2 - \omega\varpi + \varpi^2$, qui se réduit à ω^2. En posant

$$\omega - \varpi = q\omega^2,$$

il faudra déterminer la quantité réelle q, de manière que l'on ait

$$3q . D_t^2 OM + D_t^3 OM = r . D_t OM,$$

r étant pareillement réel; après quoi la direction de la droite qui va de M au milieu de LN sera donnée par la relation

$$MN + ML = (\omega - \varpi) . D_t OM + \frac{1}{2}(\omega^2 + \varpi^2) . D_t^2 OM,$$

ou par celle-ci

$$MW = q . D_t OM + D_t^2 OM.$$

Prenons pour exemple la développante du cercle,

$$OM = \int e^{i\theta}\theta d\theta.$$

En supposant $d^2\theta = 0$, il faudra rendre réelle l'expression

$$3q(1 + \theta i) + (2i + \theta),$$

ce qui donnera $q = -\frac{2}{3\theta}$, et, par suite,

$$MW = \left(\frac{1}{3} + \theta i\right) e^{\theta i}.$$

Donc, si l'on prolonge le rayon de courbure SR de la développée MR, de $RW = \frac{1}{3}$ OR, la droite MW passera par

le milieu de la corde de la courbe M, qui est parallèle à la tangente en M et infiniment voisine de cette tangente : théorème qui est vrai pour une courbe quelconque, et qui donne avec une grande facilité le rayon de courbure des développées des sections coniques, puisque dans ces courbes MW est le diamètre qui passe par M.

33. Déterminer la trajectoire obliquangle des ellipses concentriques et confocales, c'est-à-dire trouver la courbe M, dont la tangente ait une inclinaison égale à la demi-somme des inclinaisons des deux rayons vecteurs FM, F_1M, plus un angle constant.

Cette condition

$$\text{incl}\, d\text{OM} = \frac{1}{2}(\text{incl}\,\text{FM} + \text{incl}\,\text{F}_1\text{M}) + \alpha$$

est exprimée par la relation

$$d\text{OM} = pe^{i\alpha}\sqrt{\text{FM}\,.\,\text{F}_1\text{M}}.$$

Le mode de variation de la variable t, dont dépend OM, étant arbitraire, on peut donner à p une valeur réelle quelconque, propre à simplifier les formules. Posons

$$p = \frac{dt}{\sin\alpha}, \quad \text{FF}_1 = 4, \quad \text{FC} = 2.$$

L'équipollence

$$d\text{FM} = (\cot\alpha + i)\sqrt{(\text{CM} + 2)(\text{CM} - 2)}\; dt,$$

intégrée par les règles connues, en se rappelant que $d\text{FM} = d\text{CM}$, donne

$$\text{CM} = ce^{t(\cot\alpha + i)} + \frac{1}{c}e^{-t(\cot\alpha + i)},$$

ou, en posant $e^{\cot\alpha} = a$,

$$\text{CM} = ca^t e^{it} + \frac{1}{ca^t e^{it}}.$$

On peut facilement établir le mode de génération de la trajectoire M au moyen de deux spirales logarithmiques, trouver le rayon de courbure de cette trajectoire, etc.

34. Terminons par deux problèmes faciles de Mécanique.

I. Un corps pesant est soumis à l'action de la gravité gi; par suite, sa vitesse sera donnée par la relation

$$\frac{d\,\mathrm{OM}}{dt} = git + c,$$

c étant la vitesse horizontale. Sa trajectoire sera déterminée par la relation

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2} git^2 + ct + a,$$

et, en choisissant convenablement la constante a, nous aurons

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2} gi \left(t - \frac{ci}{g}\right)^2.$$

La vitesse du corps au point M de sa trajectoire est équipollente à $\sqrt{2gi.\mathrm{OM}}$: donc la direction de la vitesse partage en deux parties égales l'angle compris entre la verticale et le rayon vecteur, et cette vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la distance du corps au foyer O de la parabole.

II. *Trouver le centre de gravité de l'arc de cercle* AMB.

Prenons pour origine des inclinaisons le rayon $\mathrm{OA} = 1$. On aura

$$\mathrm{OM} = e^{it},$$

et, en intégrant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \beta$, nous aurons

$$\int_0^\beta \mathrm{OM}.dt = -i(e^{i\beta} - 1) = -i.\mathrm{AB},$$

expression qui, divisée par la longueur β de l'arc, fait voir que la distance du centre de gravité au centre O est une quatrième proportionnelle à l'arc AMB, à la corde AB et au rayon OA.

35. Nous terminerons ici cet aperçu bien incomplet de la belle et féconde méthode créée par M. Bellavitis, qui permet de traiter par un procédé uniforme tous les problèmes de Géométrie et de Mécanique, depuis les premiers éléments jusqu'aux parties les plus élevées.

Les avantages que cette méthode présente pour les recherches géométriques dans le plan sont de tout point comparables à ceux que, sous le nom de théorie des quantités *imaginaires* ou *complexes*, elle offre à l'Analyse abstraite, à laquelle elle a fait faire de si grands pas. Elle se distingue des autres méthodes de Géométrie analytique, en ce qu'elle pose directement des relations entre les points du plan, indépendamment de tout système particulier de coordonnées, et le calcul même fait apercevoir comment on doit choisir ce système pour arriver à la solution le plus simplement possible.

Naturellement cette méthode, comme toutes les autres, demande un certain exercice pour pouvoir être maniée avec facilité. Mais en y consacrant le même temps qu'à l'étude des méthodes ordinaires, on reconnaîtrait sans peine qu'elle surpasse celles-ci en généralité comme en simplicité. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur la *Rivista di Giornali* que M. Bellavitis publie chaque année dans les *Atti del R. Istituto Veneto*, et dans laquelle il donne des solutions si élégantes des problèmes traités ailleurs par les anciennes méthodes. Nous nous proposons de communiquer plus tard aux *Nouvelles Annales* quelques-unes de ces solutions, relatives à des questions résolues dans ce Journal.

SUR LA RÉSULTANTE DE TROIS FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES;

Par M. R. RADAU.

La résultante de trois formes ternaires du second degré, ou l'équation de condition qui doit être remplie pour que trois sections coniques passent par un même point, peut s'obtenir de diverses manières. On peut, par exemple, l'écrire sous la forme d'un déterminant de six lignes; il suffit pour cela d'éliminer les six quantités $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$ entre les trois formes données et trois autres du même degré qui s'annulent avec les premières. Pour ces formes auxiliaires on peut prendre, avec M. Salmon, les dérivées partielles $\frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial y}, \frac{\partial J}{\partial z}$ du déterminant fonctionnel J, qui sont du second degré, parce que J est du troisième, ou bien trois déterminants que M. Sylvester se procure de la manière suivante. La forme

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$$
$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gzx + hxy$$

peut s'écrire

$$(a)x^2 + (by + hx + fz)y + (cz + gx)z,$$

et, si nous éliminons les trois quantités x^2, y, z, qui se trouvent multipliées par les parenthèses, entre les trois équations

$$(a)x^2 + (by + hx + fz)y + (cz + gx)z = 0,$$
$$(a')x^2 + (b'y + h'x + f'z)y + (c'z + g'x)z = 0,$$
$$(a'')x^2 + (b''y + h''x + f''z)y + (c''z + g''x)z = 0,$$

nous avons le déterminant

$$(a,\ by + hx + fz,\ cz + gx),$$

qui est encore du second degré. En isolant de la même manière y^2, x, z et z^2, x, y, on obtient deux déterminants semblables; ce sont les formes auxiliaires qui permettent d'établir la résultante par élimination *dialytique* des six quantités $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$.

J'ai remarqué que l'on peut, d'une manière analogue, obtenir des formes *linéaires* qui s'évanouissent avec les formes données, de sorte qu'il est possible de présenter la résultante comme un déterminant de *trois lignes* seulement. En effet, les termes de

$$(a,\ by + hx + fz,\ cz + gx)$$

qui sont du second degré en x, y sont les deux suivants :

$$(abg)xy + (ahg)x^2.$$

(Je désignerai toujours par (abc) le déterminant des neuf coefficients $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$.)

Or, en éliminant x^2 et y^2 entre les formes primitives, nous avons

$$(a,\ b,\ hxy + fyz + gzx + cz^2)$$
$$= (abh)xy + (abf)yz + \ldots.$$

De même, en éliminant xy et x^2,

$$(h,\ a,\ by^2 + fyz + gzx + cz^2)$$
$$= (abh)y^2 + (afh)yz + \ldots.$$

Il s'ensuit que l'expression

$$(abh)(a,\ by + hx + fz,\ cz + gx)$$
$$- (abg)(a,\ b,\ hxy + fyz + gzx + cz^2)$$
$$- (ahg)(h,\ a,\ by^2 + fyz + gzx + cz^2)$$

sera divisible par z, ou linéaire en x, y. On obtient deux expressions semblables au moyen des deux autres déterminants de M. Sylvester, combinés avec ceux qui résultent de l'élimination de deux des quantités x^2, y^2, xy entre les formes données. Les neuf coefficients de ces expressions se réduisent à six, parce que trois coïncident avec trois autres. Ainsi trois équations du type

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2 = 0$$

entraînent les trois suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 y + Cx + Bz &= 0, \\ Cy + B_1 x + Az &= 0, \\ By + Ax + C_1 z &= 0, \end{aligned}$$

et la résultante peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} A_1 & C & B \\ C & B_1 & A \\ B & A & C_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les six coefficients sont :

$$\begin{aligned} A_1 &= -(abf)(abf) + (afh)(bhf) + (abh)(bfg + bch), \\ B_1 &= -(abg)(abg) + (agh)(bhg) + (abh)(afg + cah), \\ C_1 &= -(abc)(abc) + (ach)(bhc) + (abh)(cgf), \\ C &= -(abf)(abg) + (agh)(bhf) + (abh)(abc), \\ B &= -(abc)(abf) + (ach)(bhf) + (abh)(bcg), \\ A &= -(abc)(abg) + (agh)(bhc) + (abh)(caf); \end{aligned}$$

ils ont tous un terme affecté du facteur (abh), que je désignerai par λ, et l'on voit que la résultante se présente

sous cette forme :

$$(P + \lambda p, \ Q + \lambda q, \ R + \lambda r) = 0.$$

Or il est facile de faire en sorte que le déterminant (PQR) s'annule et que la résultante devienne divisible par λ. Il suffit pour cela de remarquer que les seconds termes des coefficients C, B, A peuvent être transformés de cette manière :

$$(agh)(bhf) = (bhg)(afh) + \lambda(fgh),$$
$$(ach)(bhf) = (afh)(bhc) + \lambda(chf),$$
$$(agh)(bhc) = (ach)(bhg) + \lambda(cgh),$$

et d'employer ces expressions transformées concurremment avec les anciennes dans la formation de la résultante. Il se trouve, en outre, que la somme

$$\lambda(pQR + qRP + rPQ)$$

est alors égale au terme $\lambda^3(pqr)$; nous pouvons diviser par λ^2, et il vient

$$2\lambda(pqr) + (Pqr) + (Qrp) + (Rpq) = 0.$$

Cette nouvelle expression de la résultante se compose d'une suite de termes dont chacun est le produit de quatre déterminants du troisième degré, tels que λ ; elle est donc du quatrième degré par rapport aux coefficients de chacune des trois formes données, ou bien du douzième par rapport à l'ensemble des coefficients. Développée, elle n'est d'abord symétrique qu'à l'égard des coefficients de x et de y ; mais on peut la rendre symétrique par rapport à x, y, z, en assemblant les termes homologues et en modifiant quelques autres par les procédés connus. Pour abréger l'écriture, je ferai $(abc) = \Delta$, $(fgh) = \nabla$, et je désignerai par A, B, C, F, G, H les déterminants mineurs bc, ca, ab, gh, hf, fg, de sorte que $\Delta = a\text{A} = b\text{B} = c\text{C}$, $\nabla = f\text{F} = g\text{G} = h\text{H}$. La résul-

tante peut alors se mettre sous cette forme :

$$\begin{aligned}
&\Delta^3\nabla + (\Delta + \nabla)aF.bG.cH + (8\Delta + 2\nabla)fA.gB.hC \\
&\quad + (fB.fC + gC.gA + hA.hB - \Delta^2)^2 \\
&\quad + \Delta^2(aH.bH + bF.cF + cG.aG) \\
&\quad - 2\Delta^2(aF.fA + bG.gB + cH.hC) \\
&\quad + \Sigma[(hA)^2cF.aF + (hB)^2bG.cG + cF.aF.bG.cG] \\
&\quad + \Sigma[(hA)^2(aF.fB - aG.gB) + (hB)^2(bG.gA - bF.fA)] \\
&\quad - 4\Sigma fA.fB.hB.hC \\
&\quad + \Sigma(2fA.gB.aG.bF - fC.gC.cG.cF) \\
&\quad - \Sigma aF.fA.fB.fC - \Sigma fA.aF.bF.cF \\
&\quad + \Sigma aF(bG.cG.fB + bH.cH.fC,
\end{aligned}$$

où le signe Σ se rapporte aux permutations circulaires des lettres a, b, c et f, g, h. Il est visible que plusieurs termes de cette expression proviennent du carré de l'invariant du sixième ordre :

$$\begin{aligned}
\Theta = &fB.fC + gC.gA + hA.hB \\
&- \frac{1}{2}(aH.bH + bF.cF + cG.aG \\
&+ aF.fA + bG.gB + cH.hC \\
&- \Delta^2 - \frac{1}{2}\Delta\nabla + \frac{1}{8}\nabla^2.
\end{aligned}$$

On sait, en effet, que la résultante est égale à $\Theta^2 - 64\Sigma$, où Σ est un autre invariant découvert par M. Hermite (*).

SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1867;

Par M. A. HILAIRE.

Lieu d'un point tel que les deux tangentes menées de ce point à une ellipse donnée interceptent sur une droite fixe une longueur constante.

(*) Salmon, *Leçons d'Algèbre supérieure*; traduit par M. Bazin, p. 21;

Je prends pour axes les deux diamètres conjugués de l'ellipse, dont l'un est parallèle à la droite fixe.

L'équation de l'ellipse est

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

celle de la droite fixe

$$(2) \qquad x = K.$$

L'ensemble des deux tangentes menées à la courbe par un point (α, β) est représenté par l'équation

$$(3) \qquad \begin{cases} (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) \\ \quad = (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)^2. \end{cases}$$

Si je fais dans cette équation $x = K$, l'équation résultante en y donne les ordonnées d'intersection du système des deux tangentes avec la droite fixe. Il suffit d'exprimer que la différence des racines de cette équation est égale à la longueur constante que j'appellerai $2L$; dans la relation trouvée, je remplacerai α et β par x et y et j'aurai l'équation du lieu.

Voici le calcul :

$$(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(a^2y^2 + b^2K^2 - a^2b^2)$$
$$\quad = (a^2\beta y + b^2\alpha K - a^2b^2)^2,$$

$$(b^2\alpha^2 - a^2b^2)a^2y^2 - 2a^2\beta(b^2\alpha K - a^2b^2)y$$
$$\quad + (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(b^2K^2 - a^2b^2) - (b^2\alpha K - a^2b^2)^2 = 0,$$

$$(\alpha^2 - a^2)a^2y^2 - 2a^2\beta(\alpha K - a^2)y$$
$$\quad + (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(K^2 - a^2) - b^2(\alpha K - a^2)^2 = 0.$$

Cette dernière équation est de la forme

$$Ay^2 - 2By + C = 0.$$

La différence des racines est $\dfrac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A}$: la condition

demandée est donc $\frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A} = 2L$. Supprimant le facteur 2 et élevant ensuite au carré,

$$B^2 - AC = A^2L^2.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer A, B, C par leurs valeurs

$$\begin{aligned}
&a^4\beta^2(K\alpha - a^2)^2 - a^2(\alpha^2 - a^2)\\
&\quad\times[(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(K^2 - a^2) - b^2(K\alpha - a^2)^2]\\
&\quad = a^4(\alpha^2 - a^2)^2L^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a^2y^2(Kx - a^2)^2 - (x^2 - a^2)\\
&\quad\times[(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(K^2 - a^2) - (b^2Kx - a^2)^2]\\
&\quad = a^2L^2(x^2 - a^2)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)\\
&\quad\times[(Kx - a^2)^2 - (K^2 - a^2)(x^2 - a^2) - 2a^2Kx + K^2a^2 + a^2x^2]\\
&\quad = a^2L^2(x^2 - a^2)^2,
\end{aligned}$$

$$(4)\quad (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(x - K)^2 = L^2(x^2 - a^2)^2.$$

Telle est l'équation du lieu.

Je vais l'écrire en la résolvant par rapport à y, ou, ce qui revient au même, en la résolvant par rapport à y^2 :

$$(5)\qquad y^2 = \frac{(x^2 - a^2)[L^2(x^2 - a^2) - b^2(x - K)^2]}{a^2(x - K)^2}.$$

On voit que la courbe est du quatrième degré, et que l'axe des x est un diamètre des cordes parallèles à l'axe des y.

Discussion.

Elle dépend évidemment de l'étude du trinôme du second degré

$$\begin{aligned}
&L^2(x^2 - a^2) - b^2(x - K)^2\\
&\quad = (L^2 - b^2)x^2 + 2b^2Kx - a^2L^2 - b^2K^2.
\end{aligned}$$

La quantité $B^2 - AC$ est, dans ce cas,

$$(6)\quad b^4K^2 + (L^2 - b^2)(a^2L^2 + b^2K^2) = L^2[b^2K^2 + a^2(L^2 - b^2)].$$

$$(7)\quad = L^2[a^2L^2 + b^2(K^2 - a^2)].$$

Le coefficient de x^2 étant $L^2 - b^2$, on est conduit à examiner les différentes hypothèses correspondant au signe de cette quantité.

On y est amené encore d'une autre manière.

Si l'on cherche par la méthode ordinaire les asymptotes non parallèles à l'axe des y (*), on trouve pour c et d les valeurs suivantes : $c = \pm \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{a}$, $d = \pm \frac{KL^2}{a\sqrt{L^2 - b^2}}$; donc l'existence des asymptotes dépend du signe de $L^2 - b^2$:

$L^2 - b^2 > 0$: deux asymptotes réelles, inclinées sur l'axe des x, et le coupant au même point;

$L^2 - b^2 = 0$: c s'annule et e devient infini; les deux asymptotes deviennent parallèles à l'axe des x, mais elles se transportent à l'infini;

$L^2 - b^2 < 0$: deux asymptotes imaginaires.

$$1^\circ\quad L^2 - b^2 > 0.$$

Les racines sont réelles et de signe contraire : appelons-les $-e$ et $+d$.

1° $K > a$. — On voit aisément, par des substitutions, que $-e$ est comprise entre $-\infty$ et $-a$, et que d est comprise entre a et K.

On a alors

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2}{a^2}\,\frac{(x+e)(x+a)(x-a)(x-d)}{(x-K)^2}.$$

(*) La droite $x = K$ se présente évidemment comme une asymptote parallèle à l'axe des y et même, à cause de $(x - K)^2$, comme deux asymptotes réunies en une seule; d'où il suit qu'il ne peut y avoir plus de *deux* asymptotes non parallèles à l'axe des y.

Il suffit d'examiner ce qui arrive au-dessus de l'axe des x. J'appelle E, A', A, D les points de Oz correspondant aux racines, K le point où la droite fixe coupe Ox, M le point où les asymptotes MP et MP' coupent Ox.

x peut varier :

De $-\infty$ à $-e$: une branche de courbe, d'abord asymptote à MP' et aboutissant en E;

De $-a$ à $+a$: courbe limitée allant de A' en A et enveloppant l'ellipse, comme cela résulte de la comparaison des valeurs

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$y^2 = \frac{(a^2 - x^2)[b^2(x - \mathrm{K})^2 + \mathrm{L}^2(a^2 - x^2)]}{a^2(x - \mathrm{K})^2}$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + \ldots;$$

De d à $+\infty$: comme d est compris entre a et K, on a d'abord une branche partant du point D et qui vient être asymptote à la droite K, puis une branche qui commence par être asymptote à la droite K, et qui finit par être asymptote à la droite MP.

Remarque. — La droite MP rencontre évidemment en un seul point la branche qui part de D; comme cette droite est une asymptote, elle a avec la courbe deux points de rencontre à l'infini, il n'en reste donc que deux à distanee finie : je viens d'en signaler un. L'autre ne peut pas se trouver sur la portion *fermée* de la courbe qui va de A' en A, car une droite rencontre une pareille courbe en deux points; il appartient nécessairement soit à la première, soit à la dernière de toutes les branches.

2° $\mathrm{K} < a$. — On voit encore, par des substitutions, que $-e$ est comprise entre $-\infty$ et $-a$, et que d est comprise entre a et $+\infty$.

L'équation a la même forme que précédemment, et x peut varier dans les mêmes intervalles. Mais, comme K est plus petit que a, la branche qui part de A′ vient être asymptote à la droite K, puis de l'autre côté de cette droite part une branche qui, d'abord asymptote, aboutit en A.

Il est clair que, dans ce cas, les deux points de rencontre à distance finie de la courbe avec l'asymptote MP appartiennent respectivement aux deux branches dont je viens de parler.

Enfin la branche qui part du point D n'est plus asymptote qu'à la droite MP.

3° $K = a$. — L'équation devient

$$y^2 = \frac{(x+a)(x-a)[L^2(x+a)(x-a) - b^2(x-a)^2]}{a^2(x-a)^2}$$

$$= \frac{(x+a)[L^2(x+a) - b^2(x-a)]}{a^2}$$

$$= \frac{L^2-b^2}{a^2}(x+a)\left(x + a\frac{L^2+b^2}{L^2-b^2}\right).$$

La courbe se réduit à une hyperbole qui coupe l'axe Ox aux points E et A′, et qui a pour asymptotes les deux droites MP et MP′.

$$2^\circ \quad L^2 - b^2 = 0.$$

Il n'y a plus d'asymptotes non parallèles à l'axe des y. L'équation devient

$$y^2 = \frac{(x^2-a^2)[b^2(x^2-a^2) - b^2(x-K)^2]}{a^2(x-K)^2}$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)\frac{2Kx - a^2 - K^2}{(x-K)^2}$$

$$= \frac{2Kb^2}{a^2}\frac{(x+a)(x-a)\left(x - \frac{a^2+K^2}{2K}\right)}{(x-K)^2}.$$

La racine $-e$ disparaît, la racine d est toujours positive.

1° $K > a$. — On voit, par des substitutions, que d est comprise entre a et K.

x ne peut commencer à varier qu'entre $-a$ et a; on a la même forme de courbe que dans l'hypothèse correspondante du premier cas, seulement la première branche disparaît et la dernière n'a plus pour asymptote que la droite K.

2° $K < a$. — On voit, par des substitutions, que d est $> a$.

Résultats analogues.

3° $K = a$. — L'équation devient

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}(x + a).$$

La courbe se réduit à une parabole qui coupe l'axe Ox au point A'.

3° $L^2 - b^2 < 0$.

Il n'y a plus d'asymptotes non parallèles à l'axe des y.

Dans ce cas les racines du trinôme du second degré ne sont pas nécessairement réelles; d'ailleurs, quand elles sont réelles, elles sont toutes deux de même signe et toutes deux positives.

1° $K > a$. — Les racines sont réelles, comme cela résulte de la forme (7) de $B^2 - AC$. On voit, par des substitutions, que la plus petite d est comprise entre a et K, comme la racine positive unique dans le cas de $L^2 - b^2 > 0$. La plus grande racine e est comprise entre K et $+\infty$.

L'équation peut s'écrire

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2}{\alpha^2} \frac{(x + a)(x - a)(x - d)(x - e)}{(x - K)^2}.$$

A cause de $L^2 - b^2 < 0$, x ne peut varier qu'entre $-a$ et $+a$; on a donc une courbe fermée entre A' et A, puis deux branches infinies asymptotes à la droite K, l'une partant de D, l'autre aboutissant en E.

2° $K < a$. — Les racines ne sont pas nécessairement réelles.

Si $a^2 L^2 - b^2(a^2 - K^2) > 0$, les racines sont réelles et inégales, plus grandes que a : l'équation conserve la même forme que dans le premier cas.

On a d'abord deux branches infinies asymptotes à la droite K l'une partant de A', l'autre aboutissant en A, puis une courbe fermée entre D et E.

Si $a^2 L^2 - b^2(a^2 - K^2) = 0$, la racine est double et plus grande que a, les deux points D et E se réunissent en un seul qui devient un point isolé de la courbe.

Si $a^2 L^2 - b^2(a^2 - K^2) < 0$, racines imaginaires.

3° $K = a$. — L'équation devient

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2}{a^2}(x + a)\left(x - a\frac{b^2 + L^2}{b^2 - L^2}\right).$$

A cause de $L^2 - b^2 < 0$, la courbe est une ellipse comprise entre les points A' et D.

NOTE SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

Par M. DE SAINT-GERMAIN,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Je veux présenter ici deux remarques très-simples, mais qui pourraient servir à mettre de l'unité dans la théorie de la décomposition des fractions rationnelles. En admettant la forme de décomposition connue pour le cas où le dénominateur n'a que des facteurs simples, j'en déduis le résultat ordinaire dans le cas où un nombre

quelconque de facteurs deviennent égaux. En second lieu, de la formule ainsi obtenue je passe au cas où les racines multiples sont imaginaires.

Si la fonction $F(x)$ n'admet que des diviseurs différents, et qu'on ait

$$F(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}\,\frac{1}{x-a} \\ &\quad + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)}\,\frac{1}{x-b} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Si n racines, $a, b, \ldots, f, g$ doivent devenir égales, supposons qu'auparavant elles forment une progression arithmétique dont nous ferons tendre la raison vers zéro. Posons donc

$$b = a + \varepsilon,\quad c = a + 2\varepsilon,\quad g = a + (n-1)\varepsilon.$$

La formule (1) deviendra évidemment, en faisant $F_1(x) = (x-h)(x-i)\ldots(x-l)$,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(-1)^{n-1} f(a)}{1.2.3\ldots(n-1)\varepsilon^{n-1} F_1(a)}\,\frac{1}{x-a} \\ & + \frac{(-1)^{n-2} f(a+\varepsilon)}{1.1.2\ldots(n-2)\varepsilon^{n-1} F_1(a+\varepsilon)}\,\frac{1}{x-a-\varepsilon} \\ & + \frac{(-1)^{n-3} f(a+2\varepsilon)}{1.2.1.2.3\ldots(n-1)\varepsilon^{n-1} F_1(a+2\varepsilon)}\,\frac{1}{x-a-2\varepsilon} + \ldots \\ & + \frac{f[a+(n-1)\varepsilon]}{1.2\ldots(n-1)\varepsilon^{n-1} F_1[a+(n-1)\varepsilon]}\,\frac{1}{x-a-(n-1)\varepsilon} \\ & + \frac{H}{x-h} + \ldots + \frac{L}{x-l}. \end{aligned} \right.$$

Les n premiers termes représentent le quotient par $1.2\ldots(n-1)\varepsilon^{n-1}$ de la $n-1^{ième}$ différence des valeurs que prend la fonction $\frac{f(a)}{(x-a)F_1(a)}$, quand on donne, à

la variable a, n valeurs en progression arithmétique. Or, quand ε tend vers zéro, ce quotient a pour limite, sauf le diviseur $1.2.3\ldots(n-1)$, la dérivée $n-1^{ieme}$ de la fonction par rapport à a. Quant aux termes suivants, leur limite n'offre pas de difficulté, et, quand les racines seront égales, on aura

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{d^{n-1}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\frac{1}{x-a}\right)}{da^{n-1}} + \frac{H}{x-h} + \ldots + \frac{L}{x-l}.$$

Si l'on développe le premier terme par la formule qui donne la $n-1^{ième}$ dérivée d'un produit, on retrouve la suite connue

$$\frac{f(a)}{F_1(a)}\frac{1}{(x-a)^n} + \frac{d\frac{f(a)}{F_1(a)}}{da}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}\frac{f(a)}{F_1(a)}}{da^{n-1}}\frac{1}{x-a}.$$

En second lieu, considérons, comme on le fait pour le cas des racines inégales, les fonctions simples correspondant à deux racines imaginaires conjuguées dont le degré de multiplicité est le même; la formule précédente suffit pour établir que les numérateurs sont des imaginaires conjuguées, et on a

$$S = \left\{ \begin{aligned} &\frac{A+B\sqrt{-1}}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n} + \frac{A_1+B_1\sqrt{-1}}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^{n-1}} + \ldots \\ &+ \frac{A_{n-1}+B_{n-1}\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{A-B\sqrt{-1}}{(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^n} + \ldots \\ &+ \frac{A_{n-1}-B_{n-1}\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}. \end{aligned} \right.$$

En ajoutant toutes ces fractions, on aura une fraction irréductible

$$S = \frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n},$$

$\varphi(x)$ étant du degré $2n - 1$ et à coefficients réels. Or on a par la division

$$\varphi(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi_1(x) + Mx + N,$$
$$\varphi_1(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi_2(x) + M_1x + N_1, \ldots,$$

de sorte qu'en éliminant φ_1, φ_2, etc., on trouve

$$\varphi(x) = Mx + N + [(x-\alpha)^2+\beta^2](M_1x+N_1) + \ldots$$
$$+ [(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}(M_{n-1}x+N_{n-1}),$$

$$S = \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{M_1x+N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

M et N n'étant pas nuls à la fois.

Note du Rédacteur. — Une solution moins simple de la même question a été donnée par M. Vieille, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, année 1859.

QUESTION DE LICENCE;

SOLUTION PAR M. E. PELLET,
Élève à l'École Normale.

Déterminer tous les conoïdes droits tels que, en chacun de leurs points, les rayons de courbure des deux sections principales de la surface soient égaux et dirigés en sens contraires.

On indiquera ensuite comment varie sur les surfaces obtenues la valeur absolue du rayon de courbure commun aux deux sections principales, quand le point se déplace sur l'une des génératrices.

On sait que les valeurs des rayons de courbure principaux sont les racines de l'équation

$$(rt - s^2)\rho^2 - \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r]\rho$$
$$+ (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Soit $z = \varphi \frac{y}{x}$ l'équation du conoïde, on a

$$p = -\varphi' \frac{y}{x^2}, \quad q = \varphi \frac{1}{x}, \quad r = 2\varphi' \frac{y}{x^3} + \varphi'' \frac{y^2}{x^4};$$

$$s = -\varphi'' \frac{y}{x^4} - \varphi' \frac{1}{x^2}, \quad t = \varphi'' \frac{1}{x^2},$$

φ' et φ'' étant les dérivées première et seconde de $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ par rapport à $\frac{y}{x}$.

$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0,$$

qui devient, en mettant les valeurs précédentes pour p, q, r, s, t,

$$\varphi''\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2\varphi' \frac{y}{x} = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\varphi' = \frac{a}{1 + \frac{y^2}{x^2}},$$

puis

$$\varphi = a \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y}{x}\right) + b,$$

Ainsi les conoïdes droits ayant en chaque point leurs deux rayons de courbure principaux égaux et dirigés en sens contraires, sont les hélicoïdes droits.

Les rayons de courbure principaux au point (x, y, z) ont pour expression

$$\pm \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a} = \pm \frac{a^2 + r^2}{a},$$

r étant la distance du point à l'axe des z, ou autrement la longueur de la génératrice passant par le point, comprise entre l'axe des z et le point. Le plan tangent au point (x, y, z) fait avec le plan tangent au point $(0, 0, z)$ qui est vertical, un angle dont la tangente est $\frac{r}{a}\cdot$

On peut donc facilement construire ces rayons de courbure en grandeur et en position.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 945

(voir 2e série, t. VIII, p. 276);

PAR M. AOUIT,

Élève au collége de Blaye.

Relations d'identité entre les angles d'un triangle rectiligne :

1° $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$
$$= 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1);$$

2° $(\sin A + \sin B + \sin C)^2 + 4(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$
$$+ (\cos A + \cos B + \cos C - 1)^2$$
$$= 4(\sin B \sin C + \sin A \sin C + \sin A \sin B).$$

(J.-CH. DUPAIN.)

1° On sait qu'on a

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$
$$= 2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C).$$

Ajoutant et retranchant au second membre le double des quantités égales

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

et

$$\sin(B + C) + \sin(A + C) + \sin(A + B),$$

nous avons en développant

$$\begin{aligned} &\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ &\quad = 2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C \\ &\qquad + \sin B \cos C + \sin C \cos B + \sin A \cos B \\ &\qquad + \sin C \cos A + \sin A \cos B + \sin B \cos A \\ &\qquad - \sin A - \sin B - \sin C), \end{aligned}$$

ou bien, mettant $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ en facteur,

$$\begin{aligned} &\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ &\quad = 2[\sin A(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\ &\qquad + \sin B(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\ &\qquad + \sin C(\cos A + \cos B + \cos C - 1)], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ &\quad = 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \end{aligned}$$

2° Développant, réduisant et remplaçant $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ par $-\cos(B + C)$, $-\cos(C + A)$, $-\cos(A + B)$, le premier membre devient

$$\begin{aligned} &2 \sin B \sin C + 2 \sin C \sin A + 2 \sin A \sin B \\ &\qquad + 2 \cos B \cos C + 2 \cos C \cos A + 2 \cos A \cos B \\ &\qquad - 2 \cos(B + C) - 2 \cos(C + A) - 2 \cos(A + B) \\ &\quad = 4(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A), \end{aligned}$$

à cause des termes $2 \cos B \cos C, \ldots$ qui se détruisent.

On trouve encore

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C = \frac{2S}{R^2} = \frac{2pr}{R^2},$$

p, r, R étant le demi-périmètre, le rayon du cercle inscrit, le rayon du cercle circonscrit, et

$$\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B = \left(\frac{p}{2R}\right)^2 + \left(\frac{r}{2R}\right)^2 + \frac{r}{R}.$$

On a d'un autre côté

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}, \quad \sin A = \frac{a}{2R},$$

d'où

$$\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B = \frac{bc + ac + ab}{4R^2},$$

d'où la relation connue

$$bc + ac + ab = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. (ANNÉE 1869.)

Composition de Mathématiques.

Étant donnés un rectangle et un point P dans le plan de ce rectangle, par le point P on mène une droite quelconque PQ, et l'on imagine les deux coniques qui passent par les quatre sommets du rectangle et qui sont tangentes à la droite PQ. Soient E et E′ les deux points de contact et M le point milieu de la droite EE′; chercher l'équation du lieu décrit par le point M, quand on fait tourner la droite PQ autour du point P.

On construira le lieu dans les hypothèses suivantes : le rectangle se réduit à un carré dont le côté est $2a$, et

si l'on prend pour axes des coordonnées les parallèles aux côtés du carré menées par son centre, les coordonnées du point P sont $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{4}$.

Solution.

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 = 1, \quad \text{équation de la conique,}$$
$$\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 = 1, \quad \text{équation de condition,}$$
$$\mathrm{A}px + \mathrm{B}qy = 1, \quad \text{équation de la tangente.}$$

Le lieu des points de contact sera donc

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & px & qy \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$pb^2x - a^2qy + a^2y^2 - b^2x^2 + qx^2y + py^2x = 0,$$

ou, en transportant au point (p, q),

$$p(q^2 - b^2)x + q(a^2 - p^2)y + (q^2 - b^2)x^2$$
$$+ (a^2 - p^2)y^2 + qx^2y - py^2x = 0.$$

Le lieu des milieux sera

$$2xy(qx - py) + (q^2 - b^2)x^2 + (a^2 - p^2)y^2 = 0.$$

Composition de Physique.

I.

Lois du mélange des gaz entre eux et avec les liquides.

II.

A l'aide d'une pompe pneumatique, on aspire un gaz d'un premier réservoir pour le refouler dans un second.

Les deux réservoirs ont même capacité et la pression y est, au commencement, d'une atmosphère. Le premier contient un mélange à volumes égaux de deux gaz solubles dans l'eau, dont les coefficients de solubilité sont 1 et 2 : le deuxième est à moitié plein d'eau et contient un gaz insoluble. Le piston de la pompe laisse au-dessous de lui un espace nuisible égal au dixième du volume total du corps de pompe, de sorte que le jeu de la pompe a une limite. Quand cette limite est atteinte :

1° Quelle est la pression du gaz dans les réservoirs?

2° Quelle est la composition du gaz dissous dans l'eau, et celle du mélange qui est au-dessus de l'eau?

3° Quel est le travail nécessaire pour faire mouvoir le piston, ou au moins quel est le tracé graphique qui représente ce travail?

III.

Dans une balance de Coulomb, les deux boules sont d'abord en contact et le fil sans torsion. En électrisant la boule fixe, la boule mobile se trouve repoussée à 30 degrés. On demande ce que deviendra cet écart au bout de dix minutes, sachant que la perte est ce jour-là d'un quarantième de la charge moyenne par minute.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
(ANNÉE 1869.)

Composition de Mathématiques.

On donne un triangle rectangle isoscèle AOB et on demande :

1° L'équation générale des paraboles P, tangentes aux trois côtés du triangle AOB :

2° L'équation de l'axe de l'une quelconque de ces paraboles;

3° L'équation et la forme du lieu des projections du point O, sommet de l'angle droit du triangle AOB, sur les axes des paraboles P.

Composition de Géométrie descriptive.

Représenter le solide commun à une sphère et à un cône définis de la manière suivante :

La sphère est inscrite dans un cube ayant 15 centimètres de côté; la face inférieure du cube est dans le plan horizontal de la projection et la face postérieure est dans le plan vertical.

Le cône est de révolution; il est tangent au plan horizontal, son sommet est le centre O de la face ABCD du cube, et son axe passe par le sommet (A, A') du cube.

Dans la mise à l'encre, on indiquera les constructions nécessaires pour trouver un point quelconque de la ligne d'intersection du cône et de la sphère et la tangente en ce point.

Nota. — Prendre pour ligne de terre une droite parallèle aux petits côtés de la feuille et à égale distance de ces côtés.

Solution de la question de Mathématiques;

PAR UN ABONNÉ.

Prenez pour axes des coordonnées les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle isoscèle; désignez par a la longueur OA.

Cela posé, si α et β sont deux paramètres variables, toute conique inscrite dans le triangle AOB sera repré-

sentée par l'équation

$$\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\beta y} + \sqrt{x + y - a} = 0.$$

On exprime comme à l'ordinaire que cette équation représente une parabole; et finalement l'équation générale des paraboles devient

$$(\beta x - \alpha y)^2 - 2a(\beta x + \alpha y) + a^2 = 0$$

avec la relation

$$\alpha + \beta = 1,$$

et l'axe de chaque parabole a pour équation

$$\beta x - \alpha y + \frac{a(\alpha - \beta)}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

L'équation du lieu s'obtiendra donc en éliminant α et β entre les équations

$$\alpha + \beta = 1,$$
$$\alpha x + \beta y = 0,$$
$$\beta x - \alpha y + \frac{a(\alpha - \beta)}{\alpha^2 + \beta^2} = 0,$$

ce qui conduit sans peine à l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - a(x + y)(y - x)^2 = 0.$$

Le lieu est donc du quatrième ordre, ayant au point O un point triple; en ce point triple il y a rebroussement suivant la bissectrice intérieure de l'angle AOB; et, en outre, le point générateur du lieu traverse le point O une autre fois dans la direction perpendiculaire à la tangente de rebroussement. Ce lieu n'a pas de branches infinies réelles; mais il est tangent à la droite de l'infini en chacun des deux points de rencontre de cette droite avec tous les cercles du plan.

Il n'y a donc aucune difficulté à tracer la courbe du lieu, surtout si l'on remarque que ce lieu passe par les deux extrémités de l'hypoténuse AB, et touche cette hypoténuse.

D'ailleurs l'équation polaire du lieu se déduit immédiatement de l'équation déjà écrite, et cette équation

$$\rho = a(\cos\omega + \sin\omega)(\cos\omega - \sin\omega)$$

conduit aussi à une discussion et une construction faciles.

Remarque. — Si l'on décrit la circonférence circonscrite au triangle AOB, cette circonférence est, comme chacun sait, le lieu géométrique des foyers des paraboles P; soit φ l'un quelconque de ces foyers. Projetons ce foyer en G et H sur OA et sur OB. GH sera la tangente au sommet de la parabole dont le foyer est φ; donc φV, perpendiculaire sur GH, sera l'axe, et la perpendiculaire, abaissée du point O sur φV, y marquera le point correspondant M du lieu demandé. Cela montre que le lieu demandé est aussi *le lieu du pied de la directrice sur l'axe*; et cette construction donne sans peine l'équation polaire ci-dessus.

Mais cette construction géométrique est surtout utile pour contrôler les calculs; car elle donne à elle seule la forme du lieu et ses tangentes principales.

Autre solution de la même question;

Par M. A HILAIRE.

On sait que le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.

Si je prends pour origine le sommet et pour axes les côtés de l'angle droit du triangle donné et si je pose $OA = OB = a$, l'équation du cercle circonscrit au triangle est $x^2 + y^2 = a(x + y)$.

Un point quelconque (x', y'), pris sur ce cercle, est le foyer d'une parabole inscrite au triangle. Si l'on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires seront sur une ligne droite qui est précisément la tangente au sommet de la parabole : l'équation de cette droite est

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 1.$$

D'ailleurs la directrice de la parabole doit passer par le point O; son équation est donc

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 0 \quad \text{ou} \quad y'x + x'y = 0.$$

D'après cela, pour le point (x', y') :

1° L'équation de la parabole est

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \frac{(y'x + x'y)^2}{x'^2 + y'^2};$$

2° L'équation de l'axe est

$$y - y' = \frac{x'}{y'}(x - x'),$$

x' et y' étant liés par la relation

$$x'^2 + y'^2 = a(x' + y');$$

3° Le lieu demandé n'est autre que le lieu du point de rencontre de la directrice avec l'axe. Pour avoir son équation, il suffit d'éliminer x' et y' entre l'équation de

la directrice

$$(1) \qquad y'x + x'y = 0,$$

l'équation de l'axe

$$(2) \qquad y'y - x'x = y'^2 - x'^2$$

et la relation connue

$$(3) \qquad x'^2 + y'^2 = a(x' + y').$$

Pour cela, je pose $x' = \lambda y'$. Les trois équations deviennent par cette substitution

$$(4) \qquad y'(x + \lambda y) = 0 \quad \text{ou} \quad x + \lambda y = 0,$$

$$(5) \qquad y - \lambda x = y'(1 - \lambda^2),$$

$$(6) \qquad y'(1 + \lambda^2) = a(1 + \lambda).$$

En multipliant membre à membre les deux dernières équations, on fait disparaître y' et on obtient l'équation

$$(7) \qquad (1 + \lambda^2)(y - \lambda x) = a(1 + \lambda)(1 - \lambda^2).$$

Il ne reste plus qu'à éliminer λ entre cette équation (7) et l'équation (4) qui ne contient pas y; on aura ainsi l'équation du lieu

$$\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)\left(y + \frac{x^2}{y}\right) = a\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right),$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a(y - x)(y^2 - x^2).$$

C'est une courbe du quatrième degré qui n'a pas de branches infinies; on voit sur l'équation qu'elle passe par les points circulaires à l'infini, par l'origine et par les deux autres sommets du triangle.

L'équation ne change pas si on permute x et y. La courbe est donc symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle yOx. Si on la rapporte à cette droite OX et à

sa perpendiculaire OY, l'équation devient

$$(X^2+Y^2)^2=\frac{4aX'Y'^2}{\sqrt{2}}.$$

On voit par cette forme d'équation que la courbe n'a pas de points à gauche de OY. Pour la construire, il est plus simple de prendre l'équation en coordonnées polaires, OX étant l'axe polaire. L'équation est

$$\rho=a\sqrt{2}\sin\omega\sin 2\omega.$$

La construction n'offre aucune difficulté.

RECTIFICATION.

La question 952 proposée par M. Laisant dans le numéro de juillet des *Nouvelles Annales* a déjà été résolue par M. Gerono (t. XVII, 1858, p. 283). Depuis, la solution a été insérée dans plusieurs Traités de Trigonométrie. L'énoncé de cette question appartient à Euler.

ERRATUM.

Page 315 :

L'énoncé de M. Laisant doit être lu ainsi :

Tout cube parfait augmenté de 3, 4, 5 ou 6 unités d'ordres quelconques n'est pas un cube parfait.

Page 316 :

Au lieu de : mq, *lisez :* $m.q$.

SUR LE PASSAGE DES DIFFÉRENCES AUX DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. A. GENOCCHI,
Professeur de l'Université de Turin.

Les raisonnements par lesquels on démontre, même dans les Traités les plus recommandables de calcul différentiel, le théorème général $\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$ me semblent peu satisfaisants. On s'appuie sur un lemme d'après lequel la dérivée partielle $\varphi'_x(x, \alpha)$ d'une fonction de deux variables qui est toujours nulle pour $\alpha = 0$ serait nulle aussi pour $\beta = 0$, et l'on déduit ce lemme de la relation connue

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h).$$

Mais, en examinant la démonstration de cette relation, on ne voit pas clairement comment elle peut avoir lieu dans le cas du lemme, car la plupart des considérations qu'on emploie deviennent alors inapplicables; d'un autre côté, dans l'énoncé du lemme, il ne faudrait pas parler des valeurs des fonctions $\varphi(x, \alpha)$, $\varphi'_x(x, \alpha)$, dans le cas de $\alpha = 0$; mais de leurs *limites*, et pour l'appliquer, il faudrait démontrer que toutes les conditions sous lesquelles il subsiste se trouvent vérifiées, ce qu'on ne fait pas.

Or le théorème dont il s'agit peut être établi d'une manière rigoureuse et fort simple, en supposant même, pour plus de généralité, que les accroissements successifs de x soient des quantités égales ou inégales h, h_1, h_2, etc.

Soit $y = f(x)$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, en prenant les dérivées, on aura

$$\frac{d(\Delta y)}{dx} = f'(x+h) - f'(x) = \Delta f'(x) = \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

et de là on tirera, pour n quelconque,

$$\Delta^n\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(\Delta^n y)}{dx},$$

car, en admettant cette équation et prenant les différences des deux membres, il vient

$$\Delta^{n+1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Delta\left[\frac{d(\Delta^n y)}{dx}\right] = \Delta\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où l'on a fait $z = \Delta^n y$, et, comme

$$\Delta\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d(\Delta z)}{dx} = \frac{d(\Delta^{n+1} y)}{dx},$$

il s'ensuit

$$\Delta^{n+1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(\Delta^{n+1} y)}{dx},$$

de manière que l'équation, si elle a lieu pour l'indice n, a lieu aussi pour l'indice $n + 1$.

Maintenant, ε étant une quantité infiniment petite avec h, on a par définition

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon,$$

si h et Δy désignent les accroissements correspondants de x et y. En faisant $\frac{\Delta y}{h} = y_1$, $\frac{dy}{dx} = y'$, et appelant h_1 un deuxième accroissement de x, on aura pareillement

$$\frac{\Delta y_1}{h_1} = \frac{dy_1}{dx} + \varepsilon_1, \quad \frac{\Delta y'}{h_1} = \frac{dy'}{dx} + \varepsilon',$$

où ε et ε' sont des quantités infiniment petites avec h : mais, d'après ce qu'on a démontré,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d(\Delta y)}{dx} = \frac{1}{h}\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

ou

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\Delta y'}{h};$$

donc

$$\frac{\Delta y_1}{h} = \frac{dy'}{dx} + \varepsilon' + \varepsilon,$$

savoir :

$$\frac{\Delta^2 y}{hh_1} = \frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon' + \varepsilon,$$

d'où, en passant à la limite pour $h = 0$ et $h_1 = 0$, on déduit

$$\lim\left(\frac{\Delta^2 y}{hh_1}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

On peut s'élever aux différences et dérivées d'ordres supérieurs pour établir la formule générale

$$\lim\left(\frac{\Delta^n y}{hh_1h_2\ldots h_{n-1}}\right) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

En effet, si cette formule est vraie pour l'ordre n, on pourra écrire

$$\frac{\Delta^n y}{hh_1\ldots h_{n-1}} = \frac{d^n y}{dx^n} + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit en même temps que les accroissements $h, h_1, \ldots, h_{n-1}$; soit $\frac{\Delta^n y}{hh_1\ldots h_{n-1}} = y_n$, $\frac{dy}{dx} = y'$, et soit donné à x un nouvel accroissement h_n, nous aurons

$$\frac{\Delta y_n}{h_n} = \frac{dy_n}{dx} + \varepsilon_n, \quad \frac{\Delta^n y'}{hh_1\ldots h_{n-1}} = \frac{d^n y'}{dx^n} + \varepsilon',$$

ε_n et ε' étant aussi infiniment petits avec tous les accroissements ; et, comme

$$\frac{dy_n}{dx} = \frac{1}{hh_1\ldots h_{n-1}}\,\frac{d(\Delta^n y)}{dx}$$

et

$$\frac{d(\Delta^n y)}{dx} = \Delta^n \left(\frac{dy}{dx}\right) = \Delta^n y',$$

il viendra

$$\frac{\Delta y_n}{h_n} = \frac{d^n y'}{dx^n} + \varepsilon' + \varepsilon_n,$$

ou

$$\frac{\Delta^{n+1} y}{h h_1 h_2 \ldots h_n} = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + \varepsilon' + \varepsilon_n,$$

ce qui montre que la même formule a lieu pour l'ordre $n+1$.

NOTE SUR LE PENDULE CONIQUE ;

Par M. E. COMBESCURE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Dans l'un des derniers numéros des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, M. Resal a présenté une Note relative au mouvement de rotation de l'ellipse très-petite que décrit un pendule conique dans le vide. La première solution de ce problème a été donnée, si je ne me trompe, par M. Airy dans le *Journal astronomique de Londres* (1851 et avant) ; seulement l'analyse de l'habile astronome exige la distinction des deux cas, savoir : celui où l'ellipse est presque circulaire et celui où elle est très-allongée. J'avais communiqué en 1853, à M. Gond, de Cambridge (États-Unis), une solution du même problème, et cet éminent astronome m'ayant appris que la question avait été traitée par M. Airy, je n'avais plus songé à publier ma solution. Cependant la marche que j'avais suivie me paraît plus simple et plus uniforme que celle de M. Airy. Comme elle n'est guère plus compliquée que celle qui se rapporte à la première approximation et qu'on expose dans les traités classiques, peut-être y aurait-il

quelque intérêt à la faire connaître. Je l'avais communiquée en 1856 à M. Roche, qui venait de traiter, à un autre point de vue, le mouvement circulaire du pendule pour un écart initial quelconque, et je n'y aurais plus pensé sans la Note de M. Resal. Cette Note a été l'objet d'une réclamation de M. Tissot, qui a traité, comme on sait, le mouvement pendulaire dans sa généralité. Mais il faut convenir que cette solution générale, précisément à cause de sa généralité, laisse un peu caché le fait caractéristique naissant de la deuxième approximation, savoir : le mouvement de rotation *uniforme* de l'ellipse *invariable* et la loi simple qui le régit. La même chose peut se dire par suite de l'élégante solution qu'a publiée dernièrement M. Schlaefli dans le journal de MM. Brioschi et Cremona. Enfin on sait que la deuxième approximation du mouvement pendulaire a été entreprise par Lagrange et rectifiée par M. Bravais (1854); mais il me semble que mon calcul de 1853 est plus simple, et plus propre en même temps à mettre en évidence les phénomènes dynamiques révélés par la deuxième approximation.

a est la longueur du pendule, N la pression, $K^2 = 2gh'$ la vitesse initiale qui répond à $z = h$, les z étant comptés à partir du point le plus bas; v désignant la vitesse, on a

$$v^2 = 2g(2\varepsilon - z), \quad N = \frac{v^2 + g(a - z)}{a} = g + 4g\frac{\varepsilon}{a} - 3g\frac{z}{a},$$

où $\varepsilon = \frac{1}{2}(h + h')$. Si l'on fait, pour abréger,

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \tau, \quad \frac{z}{a} = \zeta, \quad \frac{\varepsilon}{a} = \varkappa,$$

l'équation du mouvement vertical, savoir

$$\frac{d^2z}{dt^2} = N\left(1 - \frac{z}{a}\right) - g.$$

peut s'écrire

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + 4(1+\alpha)\zeta = 4\alpha + 3\zeta^2.$$

En posant $\zeta = \lambda + u$ et prenant pour λ la racine de l'ordre α de l'équation

$$\lambda^2 - \frac{4}{3}(1+\alpha)\lambda + \frac{4\alpha}{3} = 0,$$

l'équation précédente devient

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{d\tau^2} + 4\mu^2 u = 3u^2,$$

où

$$\mu^2 = 1 + \alpha - \frac{3}{2}\lambda.$$

Quand on néglige les quantités de l'ordre α^2 ou u^2, on a, pour première valeur approchée,

$$u = A\cos 2\mu\tau + B\sin 2\mu\tau.$$

Faisant

$$u = u_1 + u',$$

u' étant de l'ordre α^2, et négligeant $u_1 u'$, u'^2, qui sont de l'ordre α^3, α^4, il vient, par la substitution dans (1),

$$\frac{d^2 u'}{d\tau^2} + 4\mu^2 u' = 3u_1^2$$

$$= \frac{3(A^2+B^2)}{2} + \frac{3(A^2-B^2)}{2}\cos 4\mu\tau + 3AB\sin 4\mu\tau.$$

Si l'on pose

$$u' = \frac{3(A^2+B^2)}{8\mu^2} + M\cos 4\mu\tau + N\sin 4\mu\tau,$$

on trouve tout de suite

$$M = -\frac{A^2-B^2}{8\mu^2}, \qquad N = -\frac{AB}{4\mu^2}.$$

Les coefficients de u' étant de l'ordre α^2, on peut y remplacer μ^2 par 1.

En supposant $\frac{dz}{dt} = 0$ pour $t = 0$ la seconde valeur approchée de ζ, savoir :

$$\zeta = \lambda + u_1 + u',$$

fait voir que $B = 0$, l'hypothèse $A = 2$ ne pouvant être adoptée ici. Et, comme $z = h$ pour $t = 0$, il en résulte

$$\left(\frac{A}{2} + 1\right)^2 = 1 + \eta - \lambda,$$

où $\eta = \frac{h}{a}$ $\left(\text{de même } \eta' = \frac{h'}{a}\right)$; d'ailleurs

$$\lambda = \frac{2}{3}\left[1 + \alpha - (1 - \alpha + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \ldots = \frac{\eta + \eta'}{2} - \frac{(\eta + \eta')^2}{16} + \ldots.$$

Donc, à l'approximation où l'on s'arrête,

$$\zeta = \frac{\eta + \eta'}{2} - \frac{(\eta + \eta')^2}{16} + \frac{(\eta - \eta')^2}{8}$$

$$+ \left(\frac{\eta - \eta'}{2} + \frac{\eta\eta'}{4}\right) \cos 2\mu\tau - \frac{(\eta - \eta')^2}{16} \cos^2 2\mu\tau.$$

Les valeurs extrêmes de ζ, lesquelles répondent à $\tau = 0$, $\mu\tau = \frac{\pi}{2}$, sont η et $\eta_1 = \eta'\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$.

En introduisant dans l'expression de ζ

$$\eta' = \eta_1\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^{-1} = \eta_1\left(1 + \frac{\eta}{2}\right),$$

il vient

$$(2) \qquad \zeta = \eta \cos^2 \mu\tau + \eta_1 \sin^2 \mu\tau + \frac{(\eta - \eta_1)^2}{4} \sin^2 \mu\tau \cos^2 \mu\tau.$$

Soit ar le rayon vecteur de la projection horizontale

du mobile, en sorte que

$$r^2 = 2\zeta - \zeta^2,$$

on a, d'après la dernière équation,

$$(3) \qquad r^2 = \rho^2 \cos^2 \mu\tau + \rho_1^2 \sin^2 \mu\tau + \frac{3}{8}(\rho^2 - \rho_1^2)^2 \sin^2 \mu\tau \cos^2 \mu\tau,$$

ρ, ρ_1 étant les valeurs extrêmes de r. On peut remarquer que, si $\rho = \rho_1$, la trajectoire se réduit à un cercle, comme dans la première approximation.

La vitesse initiale étant supposée perpendiculaire au rayon vecteur initial ρ, l'équation des aires peut s'écrire

$$d\omega = \sqrt{\varkappa\varkappa_1}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2 - \zeta}\right) d\tau;$$

r étant exact jusqu'aux termes de l'ordre r^2 ou ζ, et la parenthèse étant multipliée par $\sqrt{\varkappa\varkappa_1}$, qui est de l'ordre de ζ, on ne doit conserver dans ω que des termes de l'ordre de ζ.

On peut donc prendre

$$d\omega = \sqrt{\varkappa\varkappa_1}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2}\right) d\tau.$$

L'expression (2) de ζ peut s'écrire

$$\zeta = 1 + \frac{\varkappa + \varkappa_1}{2} + \frac{(\varkappa - \varkappa_1)^2}{16} - \left(1 - \frac{\varkappa - \varkappa_1}{4} \cos 2\mu\tau\right)^2,$$

d'où, en décomposant en deux facteurs,

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2\nu} \frac{1}{\nu - 1 + \frac{\varkappa - \varkappa_1}{4} \cos 2\mu\tau} - \frac{1}{2\nu} \frac{1}{\nu + 1 - \frac{\varkappa - \varkappa_1}{4} \cos 2\mu\tau},$$

$$\nu^2 = 1 + \frac{\varkappa + \varkappa_1}{2} + \frac{(\varkappa - \varkappa_1)^2}{16}.$$

En développant le second terme de $\frac{1}{\zeta}$ suivant les puis-

sances croissantes de $(\gamma - \gamma_1)$, par les mêmes raisons d'approximation que ci-dessus, on pourra réduire le développement à son premier terme, dans lequel terme d'ailleurs ν pourra être remplacé par l'unité. D'après cela, on aura

$$d\omega = \frac{1}{\mu\nu\sqrt{\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)\left(1-\frac{\gamma_1}{4}\right)}}\,\frac{d(p\,\text{tang}\,\mu\tau)}{1+p^2\,\text{tang}^2\,\mu\tau} + \frac{3\sqrt{\gamma\gamma_1}}{4}\,d\tau,$$

où

$$p = \sqrt{\frac{\gamma_1\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)}{\gamma\left(1-\frac{\gamma_1}{4}\right)}}.$$

Aux quantités près de l'ordre γ^2, on a

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{\gamma+\gamma_1}{8}, \quad \frac{1}{\nu} = 1 - \frac{\gamma+\gamma_1}{4}, \quad \frac{1}{\mu\nu} = 1 - \frac{\gamma+\gamma_1}{8},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)\left(1-\frac{\gamma_1}{4}\right)}} = 1 + \frac{\gamma+\gamma_1}{8}.$$

Donc le coefficient du premier terme de $d\omega$ se réduit à l'unité, aux quantités près de l'ordre γ^2. Par conséquent, en intégrant,

$$(4) \qquad \omega = \text{arc tang}(p\,\text{tang}\,\mu\tau) + \frac{3\sqrt{\gamma\gamma_1}}{4}\,\tau,$$

d'où

$$\text{tang}\,\mu\tau = \frac{1}{p}\,\text{tang}\,\Omega,$$

en posant

$$\Omega = \omega - \frac{3\rho\rho_1}{8}\,\tau.$$

A cause de

$$p = \frac{\rho_1}{\rho}\sqrt{\frac{1-\frac{3}{8}\rho^2}{1-\frac{3}{8}\rho_1^2}},$$

si l'on fait, pour un moment,

$$\rho^2 \sin^2 \Omega + \rho_1^2 \cos^2 \Omega = \Theta^2,$$

on aura

$$\sin^2 \mu\tau = \frac{\rho^2 \sin^2 \Omega}{\Theta^2} + \frac{3}{8} \frac{\rho^2 \rho_1^2 (\rho^2 - \rho_1^2) \sin^2 \Omega \cos^2 \Omega}{\Theta^4},$$

$$\cos^2 \mu\tau = \frac{\rho_1^2 \cos^2 \Omega}{\Theta^2} - \frac{3}{8} \frac{\rho^2 \rho_1^2 (\rho^2 - \rho_1^2) \sin^2 \Omega \cos^2 \Omega}{\Theta^4};$$

et, en substituant dans (3),

$$r^2 = \frac{\rho^2 \rho_1^2}{\Theta^2},$$

en négligeant les quantités d'ordre supérieur à ρ^4.

Il résulte de là que, *par rapport à l'axe polaire doué du mouvement angulaire uniforme* $\frac{3\rho\rho_1}{8}\tau$, *la trajectoire horizontale est une ellipse invariable aux axes* ρ, ρ_1. La durée du passage du pendule d'un sommet au sommet diamétralement opposé sur l'ellipse mobile étant

$$T = \frac{\pi}{\mu}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

et celle d'une révolution entière du grand axe

$$\mathfrak{C} = \frac{16\pi}{3\rho\rho_1}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

on a

$$\frac{\mathfrak{C}}{T} = \frac{4\mu}{3}\frac{4a^2}{AB},$$

A, B étant les demi-grands axes de l'ellipse. On peut remarquer que $\frac{4a^2}{AB}$ est le rapport de la surface de la sphère pendulaire à l'aire de l'ellipse. D'où résulte un énoncé géométrique assez simple.

DES INVARIANTS AU POINT DE VUE DES MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

Par M. P. DE CAMPOUX.

I. — *Géométrie analytique à deux dimensions.*

1° *Transformation de l'équation du second degré en coordonnées rectangulaires dans le cas des coniques à centre rapportées à ce centre.*

Nous appellerons *invariant* toute fonction des coefficients de l'équation du second degré qui ne change pas de valeur dans la transformation des coordonnées. Ainsi tout le monde sait que si dans l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

je substitue, au premier membre, à la place de x et de y,

$$x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad \text{et} \quad x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

de façon qu'il devienne

$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2,$$

j'ai la relation

$$a + c = A + C.$$

Je dirai alors que $A + C$ est un invariant dans le cas où l'on passe d'axes rectangulaires à des axes rectangulaires ayant même origine.

Je vais m'occuper, dans le cas des coordonnes rectangulaires de même origine, de la recherche des invariants.

Soit

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

l'équation d'une conique à centre rapportée à ce centre. On peut toujours, comme on le sait, en faisant tourner les axes d'un angle convenable, ramener l'équation à la forme

$$Mx^2 + Ny^2 + F = 0.$$

C'est de cette équation simplifiée que nous partirons. Si nous faisons tourner les axes d'un angle α arbitraire et que nous désignions par x' et y' les nouvelles coordonnées, nous aurons

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Le premier membre de l'équation devient

$$M(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + N(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + F,$$

c'est-à-dire de la forme

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F$$

où

(1) $$A = M\cos^2\alpha + N\sin^2\alpha,$$

(2) $$B = 2\sin\alpha\cos\alpha(N - M),$$

(3) $$C = M\sin^2\alpha + N\cos^2\alpha.$$

Les invariants, s'ils existent, fournissent des relations entre A, B, C et les constantes M et N ; c'est donc dans les résultats de l'élimination de α entre les trois équations qui donnent A, B et C que nous devrons chercher les invariants. Ceci nous montre qu'il ne saurait y avoir plus de deux invariants, car chaque invariant fournit une relation indépendante de α et avec ces trois équations on ne saurait former plus de deux équations distinctes ne contenant pas α. Faisons l'élimination de α entre ces trois équations.

Additionnant les équations (1) et (3), nous avons

$$A + C = M + N.$$

Nous voyons que l'une des équations résultant de l'élimination de α fournit immédiatement un invariant, et que dans la transformation en question la somme des coefficient des carrés des variables est constante.

Cherchons maintenant la seconde équation fournie par l'élimination de α entre les trois équations.

Les équations (1) et (3) résolues par rapport à $\sin^2\alpha$ et à $\cos^2\alpha$ donnent

$$(4) \qquad \sin^2\alpha = \frac{CM - AN}{M^2 - N^2},$$

$$(5) \qquad \cos^2\alpha = \frac{AM - CN}{M^2 - N^2}.$$

Élevant au carré les deux membres de l'équation (2) et remplaçant $\sin^2\alpha$ et $\cos^2\alpha$ par leurs valeurs tirées des équations (4) et (5), on aura

$$(6) \qquad B^2 = \frac{4(CM - AN)(AM - CN)(N - M)^2}{(M^2 - N^2)^2}.$$

Supprimant le facteur commun $(N - M)^2$ et multipliant les deux membres par $(N + M)^2$, il vient

$$(7) \qquad B^2(M + N)^2 = 4(CM - AN)(AM - CN).$$

Développant le second membre, on le met aisément sous la forme

$$(8) \qquad 4[AC(M^2 + N^2) - MN(A^2 + C^2)].$$

Or

$$A^2 + C^2 = (A + C)^2 - 2AC$$

et, comme $A + C = M + N$, d'après ce que nous avons

démontré,

$$A^2 + C^2 = (M + N)^2 - 2AC.$$

Remplaçant $A^2 + C^2$ par cette valeur dans l'expression (8), nous avons

$$4[AC(M + N)^2 - MN(M + N)^2]$$

ou

$$4(M + N)^2(AC - MN).$$

L'équation (7) se transforme donc dans l'équation

$$(9) \qquad B^2(M + N)^2 = 4(M + N)^2(AC - MN).$$

Je supprime le facteur $(M + N)^2$ commun aux deux membres, et j'ai

$$B^2 = 4AC - 4MN$$

ou

$$B^2 - 4AC = -4MN.$$

Cette seconde équation indépendante de α montre que $B^2 - 4AC$ est un invariant. Si l'on passe d'un système rectangulaire ayant pour origine le centre à un autre système rectangulaire de même origine, le binôme $B^2 - 4AC$ conservera la même valeur ; car en revenant du système où les axes de la courbe sont les axes de coordonnées au système d'axes qui font avec les premiers un angle égal à α ou à celui des axes qui font avec les premiers un angle α', on aura

$$B^2 - 4AC = -4MN$$

et

$$B'^2 - 4A'C' = -4MN;$$

donc

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'.$$

Nous avons donc finalement pour invariants

$$A + C \quad \text{et} \quad B^2 - 4AC.$$

Il ne saurait y en avoir d'autres distincts ; nous l'avons démontré.

2° *Interprétation géométrique des invariants.*

Considérons d'abord le premier, $A + C$.

Dans l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

si je fais $y = 0$, j'ai

$$A = -\frac{F}{x^2};$$

donc A est proportionnel à l'inverse du carré du rayon a' compté sur l'axe des x ; de même B est proportionnel à l'inverse du carré du rayon b' compté sur l'axe des y. Or

$$A + C = M + N;$$

donc

$$-\frac{F}{a'^2} - \frac{F}{b'^2} = -\frac{F}{a^2} - \frac{F}{b^2}$$

ou

(1) $$\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Or

$$\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} = \frac{a'^2 + b'^2}{a'^2 b'^2},$$

et si $OA' = a'$, $OB' = b'$, $A'B' = c'$ dans le triangle rectangle $OA'B'$, on aura

$$\frac{\overline{A'B'}^2}{4S^2}$$

pour premier membre de l'équation (1), S représentant $\frac{1}{2}ab$, c'est-à-dire la surface du triangle $OA'B'$. Or

$S = \frac{1}{2} A'B' \times OH'$ en prenant $A'B'$ pour base et OH' pour hauteur; donc l'invariant est égal à $\frac{1}{\overline{OH'}^2}$.

Par conséquent, cette propriété des coefficients

$$A + C = \text{const.}$$

signifie que les cordes qui dans l'ellipse sont vues du centre sous un angle droit enveloppent un cercle.

Considérons maintenant le second invariant $B^2 - 4AC$.

Je trace l'ellipse représentée par l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Le diamètre OA des cordes parallèles à l'axe des x a pour équation

$$f'_x = 0$$

ou

$$2Ax + By = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{B}{2A} y;$$

portant cette valeur de x dans l'équation de la courbe, on a

$$y^2 = \frac{-4AF}{4AC - B^2}.$$

Or

$$A = -\frac{F}{\overline{OB}^2};$$

remplaçant A par cette valeur, on obtient

$$y^2 = \overline{AP}^2 = +\frac{4F^2}{\overline{OB}^2 (4AC - B^2)};$$

d'où

$$\overline{AP}^2 . \overline{OB}^2 = \frac{4F}{4AC - B^2}.$$

Or OB et AP sont la base et la hauteur du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués OA et OB. Donc le carré de ce parallélogramme est constant, c'est-à-dire que le parallélogramme est constant. On trouve ainsi le second des théorèmes d'Apollonius.

3° *De l'équation en λ au point de vue des invariants.*

Si je considère l'équation en λ, il est aisé de reconnaître que les racines de cette équation sont des invariants, c'est-à-dire que si l'on connaît ces racines en formant l'équation du troisième degré fournie en rapportant la courbe à certains axes, ces mêmes racines conviendront à l'équation obtenue en rapportant la courbe à d'autres axes. (Nous supposerons ici les axes rectangulaires et d'origine quelconque.)

En effet, soit $F = 0$, $F' = 0$ les équations des deux coniques et λ_1 une racine de l'équation en λ, $F + \lambda_1 F' = 0$ représentera alors un système de droites réelles ou imaginaires et $F + \lambda_1 F'$ pourra se mettre sous la forme $mX^2 + nY^2$; on aura donc

$$F + \lambda_1 F' = mX^2 + nY^2,$$

m et n étant des constantes, et X et Y des fonctions linéaires des coordonnées.

Je change de coordonnées; F se transforme identiquement en f, si $f = 0$ est l'équation de la première conique rapportée au second système; F' se transforme en f', $f' = 0$ représentant l'équation de la seconde conique rapportée au second système; X devient x et Y, y. La relation

$$F + \lambda_1 F' = mX^2 + nY^2$$

devient

$$f + \lambda_1 f' = mx^2 + ny^2;$$

donc λ_1 est une constante telle, que la courbe représentée par l'équation $f + \lambda_1 f' = 0$ est une conique passant par l'intersection des deux courbes $f = 0$, $f' = 0$ et dont l'équation peut se mettre sous la forme $mx^2 + ny^2 = 0$; c'est donc un système de droites réelles ou imaginaires, et λ_1 est une racine de la nouvelle équation en λ; on démontrerait de même pour les deux autres racines. Donc l'équation en λ conserve les mêmes racines lorsqu'on change de système de coordonnées.

L'équation en λ provenant de la combinaison des deux équations

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

est

$$\begin{aligned}(A + \lambda a)(E + \lambda e)^2 &+ (C + \lambda c)(D + \lambda d)^2 \\ &- (B + \lambda b)(D + \lambda d)(E + \lambda e) \\ &+ (F + \lambda f)(B + \lambda b)^2 - 4(A + \lambda a)(C + \lambda c)(F + \lambda f) = 0.\end{aligned}$$

Or cette équation n'a pas l'unité pour premier terme, de telle sorte que les racines pourraient ne pas changer et que les termes pourraient être cependant altérés par la transformation des coordonnées. Je veux montrer que les coefficients demeurent aussi les mêmes. Considérons le coefficient du premier terme qui s'obtient en faisant λ infini dans le premier membre de l'équation, c'est-à-dire

$$ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - bac).$$

Je dis que c'est un invariant, et, de plus, que c'est un invariant quel que soit le système de coordonnées rectangulaires d'origine quelconque.

Cette proposition peut s'établir d'une façon bien simple.

Pour cela, partons de l'équation

$$Mx^2 + Ny^2 + F = 0.$$

Si nous passons de cette équation à l'équation de la courbe rapportée à d'autres axes rectangulaires de même origine

(1) $$ax^2 + bxy + cy^2 + F = 0,$$

il est visible que l'expression

$$ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac)$$

se réduit ici à $-4MNF$, car les trois premiers termes sont nuls et $f = F$, $b^2 - 4ac = -4MN$.

Passons maintenant à d'autres axes rectangulaires d'origine quelconque.

Pour cela, posons

$$x = x' - p,$$
$$y = y' - q,$$

$-p$ et $-q$ seront les coordonnées de la nouvelle origine par rapport au centre, et par suite p et q seront les coordonnées du centre par rapport à cette origine.

Faisant la substitution de $x' - p$ à x et de $y' - q$ à y dans le premier membre de l'équation (1), nous aurons

$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2 - (2ap + bq)x' - (bp + 2cq)y'$$
$$+ ap^2 + bpq + cq^2 + F;$$

de telle sorte que

$$d = -(2ap + bq),$$
$$e = -(bp + 2cq),$$
$$f = ap^2 + bpq + cq^2 + F.$$

Or, si je rèprésente par Δ l'expression

$$\Delta = ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac)$$

et par Δ'_p la dérivée par rapport à p de Δ, j'aurai

$$\Delta'_p = -2aeb + b^2d + 2abe - 4acd + (b^2 - 4ac)(2ap + bq);$$

en mettant $2a$ en facteur dans le troisième terme, le quatrième et les termes $(b^2 - 4ac)\,2ap$, et b en facteur dans les termes restants, nous aurons

$$\Delta'_p = 2a[be - 2cd + p(b^2 - 4ac)] \\ + b[bd - 2ae + q(b^2 - 4ac)].$$

Or p et q étant les coordonnées du centre de la courbe

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

on aura, par des formules connues,

$$p = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac},$$

$$q = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac},$$

et par conséquent

$$be - 2cd + p(b^2 - 4ac) = 0,$$
$$bd - 2ac + q(b^2 = 4ac) = 0;$$

donc

$$\Delta'_p = 0;$$

de même, on verrait par un calcul analogue que

$$\Delta'_q = 0.$$

Donc Δ, ne variant ni quand p varie, ni quand q varie, est indépendant de p et de q. Donc

$$ac^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac) = -4\text{MNF},$$

c'est donc un invariant.

Ainsi l'équation en λ

$$R\lambda^3 + S\lambda^2 + T\lambda + U = 0$$

a ses racines indépendantes du système de coordonnées; de plus, R ne varie pas. Donc $-\frac{S}{R}$, $\frac{T}{R}$, $-\frac{U}{R}$, c'est-à-dire la somme des racines, la somme des produits deux à deux

de ces racines et leurs produits sont des invariants, et comme R est invariable, S, T, U ne varieront pas non plus. Donc l'équation en λ a non-seulement ses racines, mais aussi ses coefficients invariables.

4° *Des invariants dans le cas d'une origine quelconque.*

Soit

$$Mx^2 + Ny^2 + F = 0$$

l'équation d'une conique à centre rapportée à ce centre; je la reporte à une origine quelconque et à des axes rectangulaires quelconques. Alors

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

l'origine restant la même. L'équation devient alors

$$aX^2 + bXY + cY^2 + F = 0.$$

L'origine étant le point dont les coordonnées sont p et q, on aura

$$X = x' + p,$$
$$Y = y' + q,$$

et l'équation précédente se transforme dans l'équation

$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + (2ap + bq)x'$$
$$+ (bp + 2cq)y' + ap^2 + bpq + cq^2 + F = 0;$$

alors

$$d = 2ap + bq,$$
$$e = bp + 2cq,$$
$$f = ap^2 + bpq + cq^2 + F$$

et

$$a = M\cos^2\alpha + N\sin^2\alpha,$$
$$b = 2\sin\alpha\cos\alpha(M - N),$$
$$c = M\sin^2\alpha + N\cos^2\alpha.$$

Les invariants ne peuvent se trouver que dans le résultat de l'élimination de α, p, q, entre ces six équations. Or il ne peut y avoir plus de trois équations distinctes ne renfermant pas α, p, q; car s'il y avait quatre relations distinctes, j'imagine la courbe rapportée à des axes rectangulaires tracés dans le plan $o'X'$, $o'Y'$; son équation serait de la forme

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0.$$

On peut toujours choisir F de telle façon que si l'on applique les formules de transformation au changement d'axes dans lequel les nouveaux axes de coordonnées sont les axes mêmes de la courbe, on arrive à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ (cas de l'ellipse).}$$

Alors ces quatre relations distinctes entre A, B, C,... et les axes a et b de l'ellipse que nous supposerons connus et les deux relations fournies par deux points donnés de l'ellipse suffiraient pour déterminer les coefficients de la courbe.

Donc il ne peut y avoir plus de trois équations distinctes, et par conséquent plus de trois invariants distincts; or nous en connaissons trois, savoir :

$$a + c, \quad b^2 - 4ac, \quad ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac)$$

(*voir* les nos 1° et 3°). Donc il n'y a que trois invariants dans la transformation générale.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LA PARTITION DES NOMBRES (*);

PAR E. CATALAN,
Professeur à l'Université de Liége.

PROBLÈME. — *De combien de manières peut-on former une somme n, avec q nombres entiers, égaux ou inégaux?*

1. Désignons par $N_{n,q}$ le nombre cherché, et considérons l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_q = n. \tag{1}$$

En supposant que les valeurs des inconnues soient rangées par ordre de grandeur *non décroissante*, nous pourrons attribuer à x_1, successivement, les α valeurs entières

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad \alpha,$$

α représentant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{q}$; de sorte que

$$\alpha = \left(\frac{n}{q}\right) \text{ (**)}. \tag{2}$$

Soit, en particulier, $x_1 = a$: les valeurs de x_2, $x_3, \ldots, x_q$ ne pouvant être inférieures à a, nous ferons

$$x_2 = y_2 + a - 1, \quad x_3 = y_3 + a - 1, \ldots, \quad x_q = y_q + a - 1;$$

(*) Cette Note est extraite d'un volume de *Mélanges mathématiques*, qui va paraître.

(**) La notation $\left(\frac{n}{q}\right)$ équivaut à celle-ci : $E\left(\frac{n}{q}\right)$, adoptée par Legendre.

et nous aurons ainsi, au lieu de (1), α équations de la forme

$$(3)\qquad y_2 + y_3 + \ldots + y_q = n - 1 - (a-1)q,$$

dans lesquelles les $q-1$ inconnues pourront recevoir les valeurs 1, 2, 3.... Le nombre des solutions de l'équation (3) étant $N_{n-1-(a-1)q,q-1}$, il s'ensuit

$$(4)\qquad N_{n,q} = \sum_{a=1}^{a=\alpha} N_{n-1-(a-1)q,q-1},$$

ou

$$(5)\qquad \begin{cases} N_{n,q} = N_{n-1,q-1} + N_{n-1-q,q-1} + N_{n-1-2q,q-1} + \ldots \\ \qquad\qquad + N_{n-1-(\alpha-1)q,q-1}. \end{cases}$$

II. Le nombre des termes du second membre, dans l'équation (5), est α. Si $q=2$, chacun de ces termes se réduit à 1; donc $N_{n,2} = \alpha$, ou

$$(6)\qquad N_{n,2} = \left(\frac{n}{2}\right),$$

relation évidente.

III. Si $q = 3$, l'équation (5) devient

$$(7)\qquad N_{n,3} = N_{n-1,2} + N_{n-4,2} + N_{n-7,2} + \ldots + N_{n+2-3\alpha,2};$$

ou, d'après la formule (6),

$$(8)\quad N_{n,3} = \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n-4}{2}\right) + \left(\frac{n-7}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{n+2-3\alpha}{2}\right);$$

par exemple :

$$N_{19,3} = \left(\frac{18}{2}\right) + \left(\frac{15}{2}\right) + \left(\frac{12}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{6}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= 9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 = 30;$$

à cause de $\alpha = \left(\frac{19}{3}\right) = 6$.

En effet, les décompositions du nombre 19 sont :

$1+1+17$, $2+2+15$, $3+3+13$, $4+4+11$, $5+5+9$, $6+6+7$.
$1+2+16$, $2+3+14$, $3+4+12$, $4+5+10$, $5+6+8$.
$1+3+15$, $2+4+13$, $3+5+11$, $4+6+9$, $5+7+7$,
$1+4+14$, $2+5+12$, $3+6+10$, $4+7+8$,
$1+5+13$, $2+6+11$, $3+7+9$,
$1+6+12$, $2+7+10$, $3+8+8$,
$1+7+11$, $2+8+9$,
$1+8+10$,
$1+9+9$,

IV. Pour trouver le second membre de l'équation (8), on doit considérer les diverses formes du nombre n, relatives au diviseur 6. On trouve ainsi, sans difficulté :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Pour } n = 6n', & N_{n,3} = N = 3n'^2; \\ n = 6n'+1, & N = n'(3n'+1); \\ n = 6n'+2, & N = n'(3n'+2); \\ n = 6n'+3, & N = (n'+1)^3 - n'^3; \\ n = 6n'+4, & N = (n'+1)(3n'+1); \\ n = 6n'+5, & N = (n'+1)(3n'+2). \end{array}\right.$$

V. *Remarque.* — Au lieu de ce système de formules, on peut prendre celui-ci :

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} n = 6n', & N = \dfrac{n^2}{12}; \\ n = 6n'+1, & N = \dfrac{n^2-1}{12}; \\ n = 6n'+2, & N = \dfrac{n^2-4}{12}; \\ n = 6n'+3, & N = \dfrac{n^2+3}{12}; \\ n = 6n'+4, & N = \dfrac{n^2-4}{12}; \\ n = 6n'+5, & N = \dfrac{n^2-1}{12}. \end{array}\right.$$

Il en résulte ce théorème curieux, proposé par M. Vachette (*) :

Parmi les quatre nombres n^2, n^2-1, n^2-4, n^2+3, il en est un divisible par 12 : *le quotient égale le nombre des manières différentes de partager n en trois parties entières, positives, égales ou inégales.*

VI. Quand q surpasse 3, il paraît difficile d'exprimer le nombre des solutions de l'équation (1), au moyen d'une formule qui ne soit pas illusoire, et l'on est réduit à faire usage, une ou plusieurs fois, de la relation (5). Soit, par exemple, $n=39$, $q=4$; d'où $\alpha=9$. Cette relation devient

$$N_{39,4}=N_{38,3}+N_{34,3}+N_{30,3}+N_{26,3}+N_{22,3}+N_{18,3}$$
$$+N_{14,3}+N_{10,3}+N_{6,3}.$$

Mais par les formules (10) :

$$N_{38,3}=\frac{38^2-4}{18}=120,$$
$$N_{34,3}=\frac{34^2-4}{12}=96,$$
$$N_{30,3}=\frac{30^2}{12}=75,$$
$$N_{26,3}=\frac{26^2-4}{12}=56,$$
$$N_{22,3}=\frac{22^2-4}{12}=40,$$
$$N_{18,3}=\frac{18^2}{12}=27,$$
$$N_{14,3}=\frac{14^2-4}{12}=16,$$
$$N_{10,3}=\frac{10^2-4}{12}=8,$$
$$N_{6,3}=\frac{6^2}{12}=3;$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, octobre 1867.

donc

$$N_{39,4} = 120 + 96 + 75 + 56 + 40 + 27 + 16 + 8 + 3 = 441,$$

résultat conforme à celui que donne Euler (*).

VII. Si, comme l'a fait ce grand géomètre, on veut construire une *table* des valeurs de la fonction $N_{n,q}$, on peut, au lieu de la relation (5), appliquer avec avantage l'équation suivante :

$$(11) \qquad N_{n,q} = N_{n-1,q-1} + N_{n-q,q},$$

ou bien celle-ci :

$$(12) \qquad N_{n+q,q} = N_{n+q-1,q-1} + N_{n,q} \text{ (**)}.$$

Au moyen de cette relation et des valeurs initiales

$$N_{n,1} = 1, \quad N_{n+1,1} = 1, \quad N_{n,n} = 1,$$

on forme aisément la table suivante, qui contient les valeurs de $N_{n+q,q}$.

(*) *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, t. I, p. 252.

(**) Les équations (11) et (12) sont des conséquences immédiates de la relation (5).

Table des valeurs de $N_{n+q,q}$.

Valeurs de *q*.	Valeurs de *n*.															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
3	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30
4	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64
5	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101
6	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136
7	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164
8	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186
9	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201
10	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212
11	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219
12	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224
13	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227
14	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229

D'après la formule (12) :

Un terme quelconque de la troisième ligne horizontale est égal à celui qui le précède de trois rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus :

Un terme quelconque de la quatrième ligne horizon-

tale est égal à celui qui le précède de quatre rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus ;

Etc.

VIII. De la relation (11), on peut déduire très-facilement la *fonction génératrice* de $N_{n,q}$. En effet, soient

$$F(x, q) = x^q + N_{q+1,q}x^{q+1} + \ldots + N_{n,q}x^n + \ldots,$$
$$F(x, q-1) = x^{q-1} + N_{q,q-1}x^q + \ldots + N_{n-1,q-1}x^{n-1} + \ldots.$$

Multipliant la première égalité par $1 - x^q$, la seconde par x, on trouve deux développements qui doivent être identiques ; donc

$$F(x, q) = \frac{x}{1-x^q} F(x, q-1);$$

et comme

$$F(x, 1) = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x},$$

la fonction génératrice cherchée est

$$(13) \quad F(x, q) = \frac{x^q}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^q)} \ (^*).$$

IX. Le second membre de la dernière équation est égal au produit des séries

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots,$$
$$x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \ldots,$$
$$x + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13} + \ldots,$$
$$x + x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x + x^{q+1} + x^{2q+1} + x^{3q+1} + x^{4q+1} + \ldots.$$

L'exposant de x^n, dans ce produit, étant la somme des

(*) Ce théorème est dû à Euler.

exposants de x dans les facteurs de chacun des produits partiels, on a ce théorème remarquable (*) :

Il y a autant de manières de décomposer un nombre n en q parties entières, égales ou inégales, qu'il y en a de décomposer ce même nombre en q parties appartenant respectivement aux progressions

$$\begin{array}{llllll}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6,\ldots, \\
1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11,\ldots, \\
1, & 4, & 7, & 10, & 13, & 16,\ldots, \\
1, & 5, & 9, & 13, & 17, & 21,\ldots, \\
\multicolumn{6}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
1, & (q+1), & (2q+1), & (3q+1), & (4q+1),\ldots. &
\end{array}$$

Par exemple, nous avons trouvé que le nombre 19 admet 30 décompositions en 3 parties. Or ce nombre 19 admet aussi les décompositions suivantes :

1+ 1+17,	4+ 1+14,	7+ 1+11,	10+1+8,	13+1+5,	16+1+2,
1+ 3+15,	4+ 3+12,	7+ 3+ 9,	10+3+6,	13+3+3,	
1+ 5+13,	4+ 5+10,	7+ 5+ 7,	10+5+4,	13+5+1,	
1+ 7+11,	4+ 7+ 8,	7+ 7+ 5,	10+7+2,		
1+ 9+ 9,	4+ 9+ 6,	7+ 9+ 3,			
1+11+ 7,	4+11+ 4,	7+11+ 1,			
1+13+ 5,	4+13+ 2,				
1+15+ 3,					
1+17+ 1.					

et celles-ci sont également au nombre de 30.

(*) Il a été donné, sous une autre forme, par Euler (*Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 244).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 826

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 478);

PAR M. LUCIEN BIGNON,

à Lima.

Si n est un nombre entier quelconque, l'un des quatre nombres n^2, n^2-1, n^2-4, n^2+3 *est divisible par* 12, *et le quotient marque le nombre des solutions différentes de l'équation indéterminée* $x+y+z=n$ *en nombres entiers et positifs dont aucun n'est nul.* (VACHETTE.)

Si nous représentons par n' un nombre entier quelconque, en y comprenant 0, le nombre n est évidemment de l'une des six formes

$$6n';\quad 6n'+1;\quad 6n'+2;\quad 6n'+3;\quad 6n'+4;\quad 6n'+5,$$

dont les carrés respectifs sont

$$m.12;\ m.12+1;\ m.12+4;\ m.12-3;\ m.12+4;\ m.12+1;$$

en désignant par $m.12$ un multiple de 12.

La première partie du théorème est donc démontrée.

Pour démontrer la seconde, supposons d'abord $n=6n'$. Les solutions de l'équation $x+y+z=n$ qui satisfont à l'énoncé pourront être classées en $\frac{n}{3}$ groupes, comme il

suit :

$1, 1, \quad n-2; \quad 2, 2, \quad n-4; \ldots; \frac{n}{3}-1, \frac{n}{3}-1, \frac{n}{3}+2; \frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}.$

$1, 2, \quad n-3; \quad 2, 3, \quad n-5; \ldots; \frac{n}{3}-1, \frac{n}{3}, \quad \frac{n}{3}+1;$

$1, 3, \quad n-4; \quad 2, 4, \quad n-6;$

. . . . ;

$1, \frac{n}{2}-2, \frac{n}{2}+1; \quad 2, \frac{n}{2}-2, \frac{n}{2};$

$1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}; \qquad 2, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1.$

Le nombre des solutions des 1er et 2e groupes est. . . $n-3$;
Celui » des 3e et 4e » » . . . $n-9$;
. . . . ;
Celui » des $\left(\frac{n}{3}-1\right)^{e}$ et $\left(\frac{n}{3}\right)^{e}$ » . . . 3.

Le nombre total des solutions satisfaisant à l'énoncé est donc la somme de la progression arithmétique de raison 6 :

$$3, 9, \ldots, \quad n-15, \quad n-9, \quad n-3,$$

qui se compose de $\frac{n}{6}$ termes. Cette somme est $\frac{n^2}{12}$, ce qui est conforme à l'énoncé.

Supposons maintenant $n = 6n' + 1$. Le nombre des groupes restera le même, puisque les quotients de $6n'$ et $6n'+1$ par 3 sont égaux; mais il faudra augmenter d'une unité le troisième terme de chaque solution, et chaque groupe de rang impair, d'une solution nouvelle. Le nombre total des solutions sera donc

$$\frac{(n-1)^2}{12} + \frac{n-1}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{n^2-1}{12},$$

puisque la quantité que nous représentions par n dans le cas précédent est maintenant $n-1$.

Pour $n = 6n' + 2$, on voit qu'il faut augmenter chaque groupe de rang pair obtenu pour $n = 6n' + 1$ d'une solution nouvelle. Le nombre des solutions sera donc

$$\frac{(n-1)^2 - 1}{12} + \frac{n-2}{6} = \frac{n^2 - 4}{12}.$$

Pour $n = 6n' + 3$, il y aura, comme pour les deux cas suivants, un groupe impair de plus, et, comme on doit augmenter d'une solution chaque groupe impair du cas précédent, on aura

$$\frac{(n-1)^2 - 4}{12} + \frac{n-3}{6} + 1 = \frac{n^2 + 3}{12}.$$

Pour $n = 6n' + 4$, on augmentera d'une solution chaque groupe pair du cas précédent, ce qui donnera

$$\frac{(n-1)^2 + 3}{12} + \frac{n-4}{6} = \frac{n^2 - 4}{12}.$$

Enfin, pour $n = 6n' + 5$, on augmentera d'une solution les $\left(\frac{n-5}{6} + 1\right)$ groupes de rang impair du cas précédent, d'où

$$\frac{(n-1)^2 - 4}{12} + \frac{n-5}{6} + 1 = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

La question précédente a été résolue aussi par MM. Victor Strekaloff, élève de l'Université de Saint-Pétersbourg; Figa Bartolomeo, de Turin, Bédorez, élève du lycée de Douai.

Question 898

(voir 2e série, t. VIII, p. 45);

PAR M. A. MILLASSEAU,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai (classe de M. Painvin).

On donne un cercle C *tangent à une droite* D *en* O. *D'un point* M *de la circonférence, on mène* MA *perpendiculaire à* OD *et l'on prend* AB = AO. *On joint* BM, *et l'on demande l'enveloppe de la droite* BM *quand le point* M *se déplace sur la circonférence. L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables* (*).

(H. BROCARD.)

Prenons pour origine le point O, pour axe des x la droite D, pour axe des y la droite CO.

L'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0.$$

Soient (x_1, y_1) les coordonnées du point M : nous avons d'abord la condition

$$x_1^2 + y_1^2 - 2Ry_1 = 0.$$

L'équation de la droite MB est

$$xy_1 + x_1y - 2x_1y_1 = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe de cette droite, nous aurons à éliminer (x_1, y_1) entre les trois équations

$$x_1^2 + y_1^2 - 2Ry_1 = 0,$$

$$y_1x + x_1y - 2x_1y_1 = 0,$$

$$2x_1^2 - 2y_1^2 - xx_1 + (y + 2R)y_1 - 2Ry = 0.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Éliminons d'abord x_1, il nous reste à éliminer y_1 entre les deux équations

$$4y_1^3 - 4Ay_1^2 + By_1 - 2Ry^2 = 0,$$
$$8y_1^3 - 6Ay_1^2 + By_1 - Ry^2 = 0,$$

où on a posé

$$A = y + 2R,$$
$$B = x^2 + y^2 + 8Ry.$$

Éliminons successivement le terme en y_1^3 et le terme constant, il nous reste les deux équations

$$2Ay_1^2 - By_1 + 3Ry^2 = 0,$$
$$12y_1^2 - 8Ay_1 + B = 0.$$

Éliminons successivement le terme en y_1^2 et le terme constant, nous avons, en égalant les deux valeurs de y_1, l'équation de l'enveloppe

$$(B^2 - 24ARy^2)(4A^2 - 3B) = (AB - 18Ry^2)^2.$$

Développons et réduisons, il reste

$$(x^2+y^2)^2 + 4R(5x^2 - 3y^2)y - 4R^2(x^2 - 12y^2) - 64R^3y = 0.$$

Rapportons cette courbe au point C, il vient

$$(x^2 + y^2)^2 + 8R(3x^2 - y^2)y + 18R^2(x^2 + y^2) - 27R^4 = 0.$$

Cette équation représente une épicycloïde à trois rebroussements, rapportée au centre du cercle fixe.

L'épicycloïde à trois rebroussements est de quatrième ordre, possède trois points de rebroussement, sommets d'un triangle équilatéral, et les tangentes de rebroussement sont des axes de symétrie. Elle est de troisième classe, ne possède pas de points d'inflexion. Elle possède

une seule tangente double qui est la droite de l'infini, et les points de contact sont les points du cercle à l'infini. Elle est inscrite dans le cercle de rayon 3R et est circonscrite au cercle de rayon R.

On peut remarquer le théorème suivant :

Toute courbe de troisième classe ayant pour tangente double la droite de l'infini, et les points de contact étant les points du cercle à l'infini, est une épicycloïde à trois rebroussements.

Question 901

(voir 2e série, t. VIII, p. 55) ;

PAR M. E. JASSERON,

Élève du lycée de Besançon.

Lorsqu'une ellipse en roulant sans glisser sur une droite a fait un tour entier, l'arc décrit par le foyer est égal à la circonférence ayant pour diamètre le grand axe. (Jos. JOUFFROY.)

Considérons un contour polygonal convexe inscrit dans l'ellipse. Pour chaque sommet on aura la relation

$$\rho + \rho' = 2a.$$

Cela posé, faisons rouler sur la droite le contour polygonal. Soit, à un moment donné, un côté AB sur la droite xy; soit BC le côté adjacent faisant, avec AB ou xy, l'angle θ. Si l'on fait rouler, AB se détachera de xy, et BC, après avoir tourné de θ autour de B comme centre, viendra s'y placer.

Tout point du plan aura décrit un arc égal à $r\theta$, si l'on

appelle r sa distance à B. La somme des arcs décrits par les foyers sera $(\rho + \rho')$; et comme cela aura lieu pour tous les points sommets du polygone qui sont tous sur l'ellipse, il s'ensuit que $ra\Sigma\theta$ sera la somme des arcs décrits par les deux foyers. Mais si le polygone a fait un tour entier, $\Sigma\theta = 4$ droits $= 2\pi$ comme somme des angles du polygone.

Alors la somme des deux séries d'arcs droits, par chacun des foyers, sera égale à $4\pi a$.

Cette démonstration étant vraie quels que soient et les côtés et les angles du polygone, elle est encore vraie ainsi que sa conséquence à la limite; c'est-à-dire que la somme des arcs décrits par les deux foyers est égale à $4a\pi$ lorsque l'ellipse aura fait un tour entier. Mais ces arcs sont égaux, puisque les deux foyers sont réciproques; ils sont simplement disposés parallèlement.

Donc l'arc décrit par chaque foyer est égal à $2\pi a$.

C. Q F. D.

Note. — Ont resolu la même question : MM. Doublé, de Toulon; Alexis Petiot, sous-lieutenant d'artillerie de marine; Alfred Criard; Dauplay; Brocard, de l'École d'Application de Metz.

Question 906

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 45);

PAR M. A. MILLASSEAU,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai (classe de M. Painvin).

On donne une ellipse et une hyperbole homofocales dont O *est le centre commun. Par un point quelconque* P *de l'hyperbole, on mène des droites parallèles aux nor-*

males à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole. Soient H *et* K *les points où ces droites coupent l'hyperbole et* I *le milieu du segment* HK : *démontrer que les deux droites* OP et OI *sont également inclinées sur le grand axe et que le rapport de* OP *à* OI *est constant* (*). (Laguerre.)

Soient les deux coniques homofocales

$$\text{Ellipse} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\text{Hyperbole} \quad \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0,$$

$$a_1^2 = a^2 - \lambda, \quad b_1^2 = \lambda - b^2;$$

les coordonnées des points M et N sont

$$\text{M} \begin{cases} x_1 = \dfrac{aa_1}{c}, \\ y_1 = \dfrac{bb_1}{c}, \end{cases}$$

$$\text{N} \begin{cases} x_2 = \dfrac{aa_1}{c}, \\ y_2 = -\dfrac{bb_1}{c}. \end{cases}$$

Deux coniques homofocales sont orthogonales; donc la normale en M à l'ellipse est tangente à l'hyperbole; de même au point N.

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point P :

$$\frac{x_0^2}{a_1^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Le coefficient angulaire de la tangente en M à l'hyperbole est $\dfrac{ab_1}{a_1 b}$.

Le coefficient angulaire de la tangente en N à l'hyperbole est $-\dfrac{ab_1}{a_1 b}$.

Les deux parallèles menées par le point P ont pour équations :

$$\text{PH,} \quad y - y_0 = \frac{ab_1}{a_1 b}(x - x_1);$$

$$\text{PK,} \quad y - y_0 = -\frac{ab_1}{a_1 b}(x - x_0).$$

Les coordonnées du point

$$\text{H sont} \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{(a^2 + b^2)x_0 - \dfrac{2aa_1 b}{b_1} y_0}{c^2}, \\ y' &= \frac{-(a^2 + b^2)y_0 + \dfrac{2abb_1}{a_1} x_0}{c^2}; \end{aligned} \right.$$

$$\text{K sont} \left\{ \begin{aligned} x'' &= \frac{(a^2 + b^2)x_0 + \dfrac{2aa_1 b}{b_1} y_0}{c^2}, \\ y'' &= \frac{(a^2 + b^2)y_0 + \dfrac{2abb_1}{a_1} x_0}{c^2}. \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées du point milieu de KH sont

$$\text{I} \left\{ \begin{aligned} 2x &= x' + x'' = 2\frac{a^2 + b^2}{c^2} x_0, \\ 2y &= y' + y'' = -2\frac{a^2 + b^2}{c^2} y_0. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient angulaire de la droite OP est $\dfrac{x_0}{y_0}$.

Le coefficient angulaire de la droite OI est $-\frac{x_0}{y_0}$.

Ces deux droites sont donc également inclinées sur Ox

Calculons le rapport $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OI}}$:

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2}{\overline{\mathrm{OI}}^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{\frac{(a^2+b^2)^2}{c^4}(x_0^2+y_0^2)} = \frac{c^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OI}} = \text{const.}, \quad \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OI}} = \frac{c^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OI}+\mathrm{OP}}{\mathrm{OI}-\mathrm{OP}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Question 927

(voir 2e série, t. VIII, p. 144);

PAR M. BURTAIRE,

Maître-auxiliaire au lycée de Nancy.

Former l'équation des coniques qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui passent par deux points : l'un réel ayant pour coordonnées

$$x = a, \quad y = b;$$

l'autre imaginaire ayant pour coordonnées

$$x = a\sqrt{-1}, \quad y = -b\sqrt{-1}.$$

Trouver ensuite le lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des Y. (J.-CH. DUPAIN.)

1° L'origine des coordonnées étant un centre, l'équation cherchée est de la forme

(1) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Elle doit être satisfaite pour $x = a$, $y = b$ et pour $x = a\sqrt{-1}$, $y = -b\sqrt{-1}$.

De là les deux conditions

$$(2) \qquad Aa^2 + Bab + Cb^2 + F = 0,$$

$$(3) \qquad Aa^2 - Bab + Cb^2 - F = 0.$$

Entre les deux relations précédentes et l'équation (1), nous pouvons éliminer deux paramètres.

A cet effet, en ajoutant ou retranchant successivement (2) et (3), on a

$$Aa^2 + Cb^2 = 0,$$

$$Bab + F = 0;$$

d'où l'on déduit

$$A = -\frac{cb^2}{a^2}, \quad B = -\frac{F}{ab}.$$

Ces valeurs reportées dans (1), il vient, après avoir posé $\frac{C}{F} = \lambda$,

$$(4) \qquad \lambda b^3x^2 + axy - \lambda a^2by^2 - a^2b = 0$$

pour l'équation demandée.

2° Le coefficient angulaire des tangentes étant $-\frac{f'_x}{f'_y}$ et les tangentes considérées étant parallèles à l'axe des Y, on doit avoir la condition

$$f'_y = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2\lambda aby = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{x}{2aby}.$$

Cette valeur de λ reportée dans (4) donne l'équation du lieu des contacts

$$a^2xy^2 - 2a^3by + b^2x^3 = 0.$$

courbe du troisième degré ayant pour asymptote l'axe des Y, tangente aux droites $x = \pm a$ aux points $y = \pm b$, passant par les deux points considérés dans l'énoncé, et ayant trois points d'inflexion dont l'un à l'origine. Le centre est à l'origine.

Note. — **Ont résolu la même question MM. Garet, de Clermont; Bossut.**

Question 930

(voir 2e série, t. VIII, p. 47 et 192);

PAR M. CHARLES CAHEN,
Élève du lycée de Strasbourg.

Si l'on fait sur un plan B *la perspective d'une figure tracée sur un plan* A, *il y a sur ces deux plans deux points correspondants b et a tels, que tout segment de la figure* B *est vu du point b sous le même angle que le segment correspondant de la figure* A *du point a.*

(ABEL TRANSON.)

Soit CD l'intersection des deux plans A et B et soit Sab une droite menée par le point de vue S, qui perce les plans A et B en a et b (*).

Quelle doit être la position de la droite Sab pour que les points a et b jouissent de la propriété énoncée?

Remarquons d'abord que si nous menons par a dans le plan A une perpendiculaire aH et une parallèle aK à CD, l'angle KaH est droit; il faut donc, si l'on mène bR parallèle à CD et si l'on joint bH, que l'angle RbH soit aussi droit, c'est-à-dire que bH soit perpendiculaire sur CD; donc déjà les points a et b ne peuvent se trouver en dehors du plan mené par S perpendiculairement à CD. Supposons donc que Sa soit dans ce plan et soient deux

(*) Le lecteur est prié de faire la figure

droites correspondantes quelconques aL, bL. Les triangles rectangles aHL, bHL qui ont le côté HL commun devront avoir leurs angles en a et en b égaux; donc $aH = bH$, et la droite Sa est perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre AB.

D'ailleurs, si la droite Sa est perpendiculaire à ce plan bissecteur, les points a et b jouiront bien de la propriété énoncée, car, si nous considérons deux autres droites correspondantes aL', bL', les angles LaL' et LbL' sont égaux comme somme ou différence d'angles égaux, $LaH + HaL'$ et $LbH + HbL'$.

Comme il y a deux plans bissecteurs, il y a aussi deux couples de points tels que a et b.

Note. — Nous avons reçu une autre solution de M. J.-J.-A. Mathieu, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse.

Question 933

(voir 2e série, t. VIII, p. 240);

Par M. PREVEREZ,
Élève du Prytanée de la Flèche.

Trouver le lieu du centre d'une ellipse d'une grandeur constante dont le périmètre passe par un point fixe, et dont l'axe focal passe par un autre point fixe;

Discuter la forme du lieu lorsque la distance des points fixes varie de zéro à l'infini;

Ce lieu peut être obtenu en projetant, sur les tangentes d'une ellipse auxiliaire, le point fixe par lequel passe l'axe focal de l'ellipse mobile. (J.-Ch. Dupain.)

Première partie.

Je prends pour axe des x la droite qui joint les deux points fixes, et je place l'origine au point par lequel passe constamment l'axe focal.

Soient d l'abscisse de A, a, b les deux axes de l'ellipse mobile, x et y les coordonnées d'un point du lieu c. Les conditions de l'énoncé se traduisent par l'équation

$$(1)\qquad \frac{\overline{AB}^2}{b^2} + \frac{\overline{CB}^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Les équations des deux droites oc, AB sont :

$$Yx - Xy = 0,$$
$$Yy + Xz - dx = 0.$$

La condition (1) devient alors

$$\frac{d^2y^2}{b^2(x^2+y^2)} + \frac{(y^2+x^2-dx)^2}{a^2(x^2+y^2)} - 1 = 0.$$

C'est l'équation du lieu. Elle peut se mettre sous la forme

$$(2)\qquad (y^2+x^2-dx)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - a^2y^2\frac{d^2}{b^2}.$$

Cette équation transformée en coordonnées polaires devient

$$\rho = d\cos\omega \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2-d^2\sin^2\omega} = d\cos\omega \pm \rho_1.$$

La courbe a pour diamètre le cercle décrit sur oA comme diamètre.

Les coefficients angulaires des tangentes à l'origine sont donnés par la formule

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{d^2-a^2}{b^2-d^2}\,\frac{b^2}{a^2},$$

en égalant à zéro dans l'équation (2) l'ensemble des ter-

mes de moindre degré. Elles ne seront réelles que si l'on a

$$a^2 > d^2 > b^2;$$

car nous avons supposé $a > b$.

Examinons maintenant les différentes formes du lieu quand d varie de zéro à l'infini.

$$d = 0.$$

On a le cercle $\rho = a$. Ce résultat était facile à prévoir d'après la génération même du lieu.

1° $d < b$.

Il n'y a pas de tangentes à l'origine. La valeur de ρ ne s'annule jamais.

2° $d = b$.

La courbe se réduit à deux cercles.

$$\rho = d\left(1 \pm \frac{a}{d}\right)\cos\omega.$$

3° $a > d > b$.

Les tangentes à l'origine sont réelles. La valeur de ρ_1 s'annule pour $\sin^2\omega = \frac{b^2}{d^2}$.

4° $d > a$.

Les tangentes à l'origine redeviennent imaginaires, et la courbe prend une forme analogue à la première trouvée; mais elle ne coupe plus l'axe des y.

Quand d devient infini, la courbe se réduit au lieu

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 0,$$

c'est-à-dire à l'origine. On voit en effet que quand les tangentes à l'origine sont imaginaires, ce point est un

point isolé. Quand d est infini, le lieu réel est transporté à l'infini. Il ne reste plus que le point isolé.

Deuxième partie.

Par le point C du lieu, je mène une perpendiculaire CK à Co. Cherchons l'enveloppe de CK.

CK a pour équation

$$x\cos\omega + y\sin\omega = oC$$

ou

$$x\cos\omega + y\sin\omega = d\cos\omega \pm \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}}\sin\omega,$$

ou

$$(x - d)\cos\omega + y\sin\omega = \pm\sqrt{\cos^2\omega + \sin^2\omega\left(1 - \frac{d^2}{b^2}\right)}.$$

Posons $\tang\omega = \mu$. Nous aurons enfin

$$(x - d) + y\mu = \pm\sqrt{1 + \mu^2\left(1 - \frac{d^2}{b^2}\right)}.$$

Éliminant μ entre cette équation et sa dérivée par rapport à μ, on trouve

$$\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{b^2}(b^2 - d^2)} = 1;$$

donc le lieu du point C est la podaire de l'origine par rapport à cette ellipse.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Floquet, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux); Desmartres; Bedorrez, élève du lycée de Douai; Brocard, sous-lieutenant du Génie, élève à l'École d'Application de Metz; Niébylowski, élève de l'École Normale.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1869).

PREMIÈRE SESSION.

Compositions du 7 et du 8 juillet 1869.

Géométrie analytique.

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, H un point fixe de l'axe Oy, ayant pour ordonnée h. On sait que l'équation générale des coniques qui ont un foyer au point O passent au point H, et dont l'axe focal est situé sur Ox, est

$$(1) \qquad l^2(x^2+y^2) - h^2(x-l)^2 = 0,$$

dans laquelle le paramètre variable l représente l'abscisse du pied de la directrice qui correspond au foyer O. Cela posé, on demande de résoudre les questions suivantes :

1° On considère l'une quelconque des coniques représentées par l'équation (1); on mène par le point O une parallèle à la tangente à cette conique au point H. Cette parallèle rencontre la conique en deux points; et on demande le lieu de ces points quand on fait varier l.

Sur ce lieu, on séparera les parties qui correspondent au cas où la conique est une ellipse de celles qui correspondent au cas où elle est une hyperbole.

2° On considère l'une quelconque des hyperboles représentées par l'équation (1); par le point O, on mène des parallèles aux asymptotes de cette hyperbole, et l'on demande le lieu des points de rencontre de ces droites avec la courbe, quand on fait varier l.

3° On considère encore une quelconque des hyperboles

représentées par l'équation (1), et par le pied de la directrice qui correspond au foyer O, on mène des parallèles aux asymptotes de cette hyperbole; on demande le lieu des points de rencontre de ces droites avec la courbe, quand on fait varier l.

Trigonométrie.

On donne dans un triangle :

$$\log a = 3,0606512,$$
$$\log b = 2,7705543,$$
$$C = 42^\circ 16' 23''.$$

Calculer A, B, c et l'aire du triangle.

QUESTIONS.

954. Étant donnés une parabole et un cercle passant par le foyer et coupant la parabole en quatre points, trouver le lieu des milieux des tangentes communes.

(Olga Ermanska.)

955. En deux points d'une ellipse on mène les normales; la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde passe par les milieux des segments interceptés entre les normales par chacun des axes. (Laguerre.)

956. En deux points d'un ellipsoïde on mène les normales. Le plan mené par le milieu de la corde et perpendiculairement à cette corde passe par les milieux des lignes qui joignent les points de rencontre des normales avec chacun des plans de symétrie. (Laguerre.)

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE RECTANGLE;

PAR M. GEORGES DOSTOR,

Docteur ès sciences.

1. THÉORÈME I. — *Dans tout triangle rectangle, la somme des carrés des inverses des deux côtés de l'angle droit est égale au carré de l'inverse de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.*

Ainsi, si b, c sont les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, d la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse a, on aura

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}.$$

2. THÉORÈME II. — *Lorsque deux triangles rectangles sont semblables, le produit des hypoténuses est égal à la somme des produits des côtés homologues des angles droits.*

De sorte que, si a', b', c' sont les côtés d'un second triangle rectangle semblable au premier, il viendra

$$aa' = bb' + cc'.$$

3. THÉORÈME III. — *Lorsque deux triangles rectangles sont semblables, la somme des produits des inverses des côtés homologues des angles droits est égale au produit des inverses des perpendiculaires abaissées des sommets des angles droits sur les hypoténuses.*

C'est-à-dire que si d' est la perpendiculaire homologue à d, on aura

$$\frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'} = \frac{1}{dd'}.$$

4. Théorème IV. — *Lorsque deux polygones semblables sont terminés par les côtés homologues a et a', b et b', c et c',..., comprenant les angles A, B,...; dans toute relation entre a, b, c,... et les angles A, B,..., on peut remplacer les côtés a, b, c,... respectivement par les moyennes géométriques $\sqrt{aa'}$, $\sqrt{bb'}$, $\sqrt{cc'}$,... entre a et a', b et b', c et c'.*

Ainsi, pour deux triangles semblables, il viendra

$$aa' = bb' + cc' - 2\sqrt{bb'}.\sqrt{cc'}.\cos A.$$

5. *Remarque.* — Le théorème I établit une relation entre la tangente, la normale et la coordonnée correspondante d'une courbe, dans le cas d'axes quelconques, tandis que le théorème III exprime une relation entre les deux tangentes, les deux normales et les deux coordonnées du point de contact dans le cas de coordonnées rectangulaires, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{T_x^2} + \frac{1}{N_x^2} = \frac{1}{y^2 \sin^2\theta}, \quad \frac{1}{T_y^2} + \frac{1}{N_y^2} = \frac{1}{x^2 \sin^2\theta};$$

$$\frac{1}{T_x N_y} + \frac{1}{T_y N_x} = \frac{1}{xy},$$

θ représentant l'angle des axes dans l'application du théorème I.

Les démonstrations de ces théorèmes sont très-faciles.

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES TERMES D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

Par M. Ph. GILBERT.

Posons

$$\sigma_{n,p} = \mu^p + (\mu + \alpha)^p + (\mu + 2\alpha)^p + \ldots + (\mu + n\alpha)^p,$$

n et p étant des nombres entiers. On trouve, dans tous les

Traités d'Algèbre, une formule pour calculer $\sigma_{n,p}$ au moyen de $\sigma_{n,p-1}, \sigma_{n,p-2}, \ldots, \sigma_{n,1}$. En outre, plusieurs géomètres (*) ont donné diverses expressions de $\sigma_{n,p}$ en fonction explicite de n, mais la loi de formation des coefficients est assez compliquée. Mon but, dans cette Note, est d'exprimer $\sigma_{n,p}$ en fonction de $\sigma_{n,p-2}, \sigma_{n,p-4}, \ldots$, ce qui n'a pas été fait, à ma connaissance, et ce qui me paraît offrir divers avantages, entre autres celui d'abréger les calculs.

Si l'on pose

$$u = e^{\mu x\sqrt{-1}} + e^{(\mu+\alpha)x\sqrt{-1}} + \ldots + e^{(\mu+n\alpha)x\sqrt{-1}},$$

on aura, pour $x = 0$,

$$\left(\frac{d^p u}{dx^p}\right)_0 = (\sqrt{-1})^p \sigma_{n,p}.$$

D'ailleurs, on trouve sans peine

$$u \sin\frac{\alpha x}{2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[e^{\left(\mu+n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)x\sqrt{-1}} - e^{\left(\mu-\frac{\alpha}{2}\right)x\sqrt{-1}}\right],$$

et en différentiant $(p+1)$ fois par rapport à x les deux membres de cette équation, puis faisant $x = 0$, on aura

$$\begin{aligned}(p+1)\frac{\alpha}{2}\left(\frac{d^p u}{dx^p}\right)_0 \sin\frac{\pi}{2} &+ \frac{(p+1)p}{1.2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{d^{p-1}u}{dx^{p-1}}\right)_0 \sin\frac{2\pi}{2} \\ &+ \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\left(\frac{d^{p-2}u}{dx^{p-2}}\right)_0 \sin\frac{3\pi}{2} + \ldots \\ &+ (p+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p\left(\frac{du}{dx}\right)_0 \sin\frac{p\pi}{2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} u_0 \sin\frac{(p+1)\pi}{2} \\ = \frac{(\sqrt{-1})^p}{2}&\left[\left(\mu+n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} - \left(\mu-\frac{\alpha}{2}\right)^{p+1}\right].\end{aligned}$$

(*) M. Puiseux, *Journal de M. Liouville*, 1846, p. 477. — M. Pepin, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1856, p. 27. — M. Catalan, même volume, p. 230, et *Mélanges mathématiques*, p. 110.

Substituons à $\left(\frac{d^i u}{dx^i}\right)_0$ sa valeur $(\sqrt{-1})^i \sigma_{n,i}$, remplaçons $\sin\frac{2i\pi}{2}$ par zéro, divisons toute l'équation par $(\sqrt{-1})^p \frac{\alpha}{2}$, nous trouverons enfin :

1° Si p est *pair*,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sigma_{n,p-2} \\ &\quad + \frac{(p+1)p\ldots(p-3)}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 \sigma_{n,p-4} + \ldots + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \sigma_{n} \\ &= \frac{\left(\mu + n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1}}{\alpha}. \end{aligned} \right.$$

2° Si p est *impair*,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &(p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sigma_{n,p-2} + \ldots \\ &\quad + (p+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-1} \sigma_{n,1} \\ &= \frac{\left(\mu + n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1}}{\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les formules qui donnent $\sigma_{n,p}$ en fonction de $\sigma_{n,p-2}$, $\sigma_{n,p-4}$, ...

Il importe d'observer que $\sigma_{n,0}$ est égal, toujours, à $n+1$.

Cas particuliers : 1° Si l'on fait, dans ces formules, $\mu = 0$, $\alpha = 1$, il vient

$$\sigma_{n,p} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p,$$

et les équations (1) et (2) donnent la somme des puis-

sances semblables des nombres naturels. Si p est pair,

$$(p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\frac{1}{2^2}\sigma_{n,p-2} + \ldots + \frac{1}{2^p}\sigma_{n,0}$$
$$= \frac{(2n+1)^{p+1}-1}{2^{p+1}};$$

si p est impair,

$$(p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\frac{1}{2^2}\sigma_{n,p-2} + \ldots$$
$$+ (p+1)\frac{1}{2^{p-1}}\sigma_{n,1} = \frac{(2n+1)^{p+1}-1}{2^{p+1}}.$$

On déduit immédiatement de ces formules les propositions connues : Si l'on exprime $\sigma_{n,p}$ en fonction des puissances de $\left(n+\frac{1}{2}\right)$, l'expression ne contiendra que des puissances impaires, si p est pair, et que des puissances paires, si p est impair; si p est un nombre pair, $\sigma_{n,p}$ est toujours nul pour $n = -\frac{1}{2}$, etc. (*).

2° Faisons $\mu = \frac{\alpha}{2}$, et

$$\Sigma_{n,p} = 1^p + 3^p + 5^p + \ldots + (2n+1)^p,$$

d'où

$$\sigma_{n,p} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \Sigma_{n,p}.$$

Les formules (1) et (2) se réduisent aux suivantes :

$$(p+1)\Sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\Sigma_{n,p-2} + \ldots + \Sigma_{n,0}$$
$$= 2^p(n+1)^{p+1};$$
$$(p+1)\Sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\Sigma_{n,p-2} + \ldots + (p+1)\Sigma_{n,1}$$
$$= 2^p(n+1)^{p+1},$$

suivant que p est pair ou impair.

(*) *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 350.

COMPOSITION DE L'ÉCOLE NORMALE (1869);

Par M. Louis SALTEL,

Élève du lycée de Lille, ancien élève du lycée Louis-le-Grand.

Étant donnés un rectangle et un point P *dans le plan de ce rectangle, par le point* P, *on mène une droite quelconque* PQ, *et l'on imagine les deux coniques qui passent par les quatre sommets du rectangle et qui sont tangentes à la droite* PQ. *Soient* E *et* E' *les deux points de contact et* M *le point milieu de la droite* EE'. *On demande l'équation du lieu décrit par le point* M, *quand on fait tourner la droite* PQ *autour du point* P. *On construira le lieu dans les hypothèses suivantes : le rectangle se réduit à un carré dont le côté est* $2a$, *et, si l'on prend pour axes de coordonnées les parallèles aux côtés du carré menées par son centre, les coordonnées du point* P *sont* $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{2}$.

PRÉLIMINAIRES.

Afin de ne rien emprunter à des théories étrangères au programme du Cours de Mathématiques spéciales, nous allons rappeler quelques notions préliminaires.

(a) Définition. — On dit que six points, se correspondant deux à deux sur une droite, sont en *involution* lorsqu'on peut déterminer sur cette droite un point O tel que l'on ait

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'.$$

(b) Théorème. — *Une sécante quelconque rencontre*

trois cercles ayant même axe radical, en six points, qui sont en involution.

Le point O étant sur l'axe radical, a même puissance par rapport aux trois cercles.

Donc

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'.$$

(*c*) Exemple algébrique. — *Si l'on prend, à partir d'une origine quelconque, des longueurs représentées par les racines des équations*

$$\rho^2 + p\rho + q = 0,$$
$$\rho^2 + p'\rho + q' = 0,$$
$$\rho^2 + p\rho + q + \lambda(\rho^2 + p'\rho + q') = 0,$$

on a six points se correspondant deux à deux et formant une involution.

En effet, prenons pour axe des x la droite sur laquelle se trouvent les points, pour origine l'origine déjà fixée (axes rectangulaires), et considérons :

1° Les deux cercles

$$y^2 + \rho^2 + p\rho + q = 0,$$

passant par A et A′,

$$y^2 + \rho^2 + p'\rho + q' = 0,$$

passant par B et B′;

2° Le cercle

$$y^2 + \rho^2 + p\rho + q + \lambda(y^2 + \rho^2 + p'\rho + q') = 0,$$

passant par l'intersection des deux premiers.

On a vu que toute sécante les coupe suivant six points formant une involution, en particulier l'axe des ρ, que l'on obtient en faisant $y = 0$.

Donc

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'.$$

(*d*) Théorème de Desargues. — *Si l'on considère une conique passant par l'intersection de deux autres, toute sécante coupe ces trois coniques suivant six points se correspondant deux à deux sur chaque conique et formant une involution.*

Soient les coniques $U = 0$, $V = 0$, $U + \lambda V = 0$; par l'origine, menons une sécante $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho \, (\alpha^2 + \beta^2 = 1)$, les distances des points obtenus à l'origine des coordonnées sont racines d'équations de la forme

$$\rho^2 + p\rho + q = 0,$$
$$\rho^2 + p'\rho + q' = 0,$$
$$\rho^2 + p\rho + q + \lambda(\rho^2 + p'\rho + q') = 0.$$

Donc ils sont *en involution.*

(*e*) Corollaire. — *Il y a deux coniques tangentes à une droite donnée et passant par l'intersection de deux coniques données.*

Considérons la sécante et les trois coniques précédentes; pour un certain point O, on a

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'.$$

Supposons que la sécante devienne tangente à la conique C, la nouvelle relation sera

$$OA \times OA' = OB \times OB' = \overline{OC}^2,$$

relation qui donne géométriquement le point O et les points de contact; connaissant les quatre points (AA′), (BB′), il suffit évidemment d'appliquer la construction suivante :

Par les points (AA′), (BB′) *et un point arbitraire, décrivez deux cercles; tracez leur axe radical jusqu'au point* O, *où il rencontre la sécante; menez ensuite du*

point O *la tangente à l'un des cercles, et décrivez du même point, comme centre, avec un rayon égal à la longueur de la tangente, une circonférence qui coupera la sécante aux points de contact.*

Le point O porte le nom de *point central*, et les points de contact s'appellent *points doubles*.

(f) Détermination algébrique du point central. — Soient une sécante $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho$, et les points

$$\rho^2 + p\rho + q = 0, \quad \rho^2 + p'\rho + q' = 0.$$

Considérons les deux cercles

$$y^2 + \rho^2 + p\rho + q = 0,$$
$$y^2 + \rho^2 + p'\rho + q' = 0;$$

ils passent par (AA'), (BB') : leur axe radical a pour équation

$$(p - p')\rho + q - q' = 0,$$

équation du premier degré qui détermine le point central

$$\rho = \frac{q' - q}{p - p'}.$$

Si l'on applique aux deux coniques

$$(\gamma) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$(\delta) \quad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0,$$

et à la sécante

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho,$$

on trouve immédiatement

$$(\theta) \quad \rho = \frac{F'(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2) - F(A'\alpha^2 + 2B'\alpha\beta + C'\beta^2)}{\left\{\begin{array}{l} 2[(D\alpha + E\beta)(A'\alpha^2 + 2B'\alpha\beta + C'\beta^2) \\ \quad - (D'\alpha + E'\beta)(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2)] \end{array}\right\}}.$$

(*g*) Détermination algébrique des points doubles. — En transportant l'origine au point O, les points doubles sont racines de l'équation

$$x^2 = \left(\frac{q'-q}{p-p'}\right)^2 + p\,\frac{q'-q}{p-p'} + q;$$

en revenant à l'origine primitive,

$$(p-p')x^2 - 2(q'-q)x - p(q'-q) - q(p'-p) = 0.$$

(*h*) Ces considérations géométriques et algébriques posées, il est évident que la question proposée est un cas particulier de la suivante.

Problème. — *Par un point* P, *pris à volonté dans le plan de deux coniques, on mène une transversale quelconque, on imagine les deux coniques réelles ou imaginaires qui passent par leur intersection et qui sont tangentes à la transversale aux points* E *et* E'; *on demande le lieu du point milieu de la droite* EE'.

(*i*) Ordre de la courbe. — Sur chaque sécante issue du point P, la construction indiquée en (*e*) ne donne qu'un seul point du lieu; donc l'ordre de la courbe est égal à *l'ordre de multiplicité du point* P *plus un*.

(*k*) Ordre de multiplicité du point P. — Chercher le degré de multiplicité du point P, c'est chercher le nombre des sécantes donnant, pour point correspondant du lieu, le point P. Cela aura lieu toutes les fois que le point P aura même puissance par rapport aux deux courbes, c'est-à-dire qu'on aura

$$PA \times PA' = PB \times PB'.$$

Cette égalité montre clairement que les transversales demandées sont déterminées par le point P et les points communs aux deux lieux géométriques suivants :

Par un point P *pris dans le plan de deux coniques, on mène une transversale quelconque qui rencontre les deux coniques en des points* (AA'), (BB'); *on prend sur cette droite des points* M *et* M', *tels que*

$$\overline{PM}^2 = PA \times PA', \quad \overline{PM'}^2 = PB \times PB' :$$

lieux des points M et M'.

Il est évident, géométriquement, que ces lieux se composent de deux coniques respectivement homothétiques aux coniques proposées, et ayant le point P pour centre commun.

Les sécantes demandées sont les deux rayons communs à ces deux courbes.

Donc le lieu est du troisième ordre, et les tangentes au point P sont les deux sécantes que l'on vient de déterminer.

Si l'on cherche, du reste, les équations des lieux précédents, le point P étant toujours pris pour origine, et les coniques ayant pour équation (γ) et (δ), on trouve

$$A x^2 + 2Bxy + Cy^2 = F,$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = F'.$$

Les rayons communs ont pour équation

$$F'(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) = F(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2).$$

Remarquons que, sans rien particulariser, nous pouvons supposer que l'une des coniques (δ), (γ) est celle qui passe par les quatre points *donnés* et par le point P. Ce que l'on exprimera en faisant soit $F = 0$ ou $F' = 0$. Supposons $F = 0$, les deux tangentes au point double seront dès lors représentées par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

(*l*) Détermination géométrique des tangentes au point double. — *On construira la conique passant par les quatre points donnés et le point* P; *les directions asymptotiques issues du point* P *seront les tangentes.*

Dès lors le point P sera :

1° Un point double réel, si la conique qui passe par les quatre points et le point P est une hyperbole;

2° Un point de rebroussement, si la conique est une parabole;

3° Un point isolé, si cette conique est une ellipse.

Or on sait que les régions où doit se trouver le point P pour donner une ellipse ou une hyperbole sont séparées par les deux paraboles des quatre points : le problème du point double est donc complétement résolu.

(*m*) Directions asymptotiques. — Pour que le point du lieu soit à l'infini sur la sécante, d'après la construction géométrique indiquée, il faut et il suffit que l'axe radical correspondant lui soit parallèle.

Il est évident, à l'inspection de la figure, que, *lorsqu'une sécante est parallèle à l'axe radical de deux cercles, les segments interceptés ont même point milieu. Réciproquement, si deux segments ont même point milieu, l'axe radical des deux cercles est parallèle à la direction de ces segments.*

Donc les directions asymptotiques sont déterminées par le point P et les points communs aux deux lieux suivants.

(*n*) Lieux des points milieux des segments interceptés sur une droite issue du point P et rencontrant les deux coniques proposées. — En ayant égard à la définition de ces deux lieux, on reconnaît immédiatement que chacun d'eux se compose d'une conique homothétique à la proposée, passant par son centre et le point P, ayant

pour centre le milieu du segment compris entre le point P et le centre de la conique.

Les deux coniques se coupant en quatre points, dont trois sont généralement distincts du point P, *on obtient en général trois directions asymptotiques distinctes.* — Les deux coniques dont nous venons de parler ont pour équations

$$\text{(M)}\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0,$$

$$\text{(N)}\qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + D'x + E'y = 0;$$

les trois droites qui vont de l'origine aux points d'intersection sont représentées par l'équation

$$(D'x + E'y)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) - (Dx + Ey)(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2) = 0.$$

(*o*) Supposons $D = D'$, $E = E'$, c'est-à-dire les polaires du point P parallèles : les deux coniques M et N sont tangentes à l'origine suivant la parallèle à la polaire, qui est une des directions asymptotiques de la courbe ; les deux autres directions asymptotiques sont les deux autres sécantes communes : on sait que, dans ce cas, on obtient facilement la sécante commune opposée à la tangente.

Si les deux coniques proposées sont homothétiques, les directions asymptotiques sont parallèles à la corde commune qui reste à distance finie, et à leurs asymptotes.

Si l'on suppose enfin le point P au centre de l'une des coniques passant par les quatre points donnés, « c'est-à-dire sur la conique des neuf points », $D = 0$, $E = 0$, les directions asymptotiques sont les asymptotes de la première conique, et la parallèle à la polaire du point P relative à la deuxième conique.

(*p*) Points simples remarquables a distance finie. —

La construction (e) montre que les quatre points communs aux deux coniques font partie du lieu.

(q) Recherche du troisième point du lieu sur les cordes communes. — Il suffit de mener par le point P une parallèle à l'un des systèmes de cordes; son point de rencontre avec la deuxième droite de ce système est le point demandé. C'est encore évident d'après la construction indiquée en (e).

(r) Parties parasites de la courbe. — Nous avons vu que les deux coniques, passant par les quatre points *donnés* et tangentes à une transversale *donnée*, peuvent être réelles ou imaginaires, le point milieu étant toujours réel. Il est donc intéressant de séparer sur le lieu les parties qui répondent à des coniques réelles ou imaginaires.

En vertu du principe de continuité, il est évident que les limites cherchées sont les points communs à la courbe et au lieu suivant :

Lieu des points de contact des tangentes issues du point P *aux coniques passant par les quatre points donnés.*

On voit *à priori* que ce lieu est du troisième ordre : donc les points cherchés sont au nombre de neuf. On peut prévoir qu'il y en a six à distance finie, à savoir : les quatre points donnés et le point double P; et trois à distance infinie, à savoir : les directions asymptotiques.

Nous nous bornerons à donner l'équation du lieu, sans entrer dans de plus longs détails :

$$\begin{aligned}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F)(Dx' + Ey' + F')\\ = (A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F')(Dx + Ey + F).\end{aligned}$$

(s) Cas où le lieu se décompose. — Une droite et une conique sont rencontrées, d'après le théorème de Bezout,

l'une en trois points, l'autre en six points, par une courbe du troisième degré.

Donc un lieu du troisième ordre se décompose s'il a quatre points en ligne droite ou sept points sur une conique.

Ce qui précède donne l'intersection complète de la conique qui passe par les quatre points et le point P avec la courbe du troisième ordre, à savoir : les quatre points donnés et le point double. Ces quatre mêmes points et le point P représentent encore l'intersection complète de la courbe avec la conique des neuf points, lorsque le point P appartient à cette dernière conique.

On a déjà indiqué l'intersection complète de la courbe avec les cordes communes.

Il résulte de là et des considérations qui précèdent que le lieu se décompose :

1° Si le point P est sur l'une des sécantes communes aux deux coniques : la sécante fait partie du lieu ;

2° Si les deux coniques sont homothétiques : on obtient trois droites, dont l'une toujours réelle (la corde commune avec deux coniques), les deux autres pouvant être réelles ou imaginaires et étant représentées par les directions asymptotiques communes aux deux coniques.

Deux cercles, par exemple, donnent l'axe radical et les deux droites $x^2 + y^2 = 0$.

Deux hyperboles donnent les parallèles aux asymptotes et la corde commune passant par l'intersection des deux polaires du point P.

Deux paraboles donnent deux droites confondues, etc.

3° Si le point P est rejeté à l'infini dans une direction donnée.

Dans ce dernier cas, toutes les constructions indiquées se simplifient notablement. Aussi nous bornerons-nous à donner plus loin l'équation du lieu.

(*t*) Équation du lieu dans le cas général. — Dès maintenant, nous pouvons écrire, *à priori*, l'équation du lieu, en nous appuyant sur ce que l'ensemble des termes de degré moindre d'une courbe qui passe par l'origine représente, à un coefficient près, les tangentes en ce point, et sur ce que l'ensemble des termes du plus haut degré donne aussi les directions asymptotiques à un coefficient près.

Donc l'équation du lieu est, à un coefficient près μ,

$$\begin{aligned}\mu[(D'x + E'y)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)\\ - (Dx + Ey)(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2)]\\ = F(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2) - F'(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).\end{aligned}$$

On achève de déterminer le coefficient μ en exprimant que le lieu passe par l'un quelconque des points trouvés, ou, ce qui est plus simple, en exprimant que l'équation satisfait à un cas particulier dont on connaît le résultat, par exemple pour deux cercles. On trouve ainsi que $\mu = 2$.

On peut, du reste, obtenir très-facilement directement l'équation du lieu; on n'a qu'à substituer dans la formule (θ)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

on obtient

$$\begin{aligned}2[(D'x + E'y)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)\\ - (Dx + Ey)(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2)]\\ = F(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2) - F'(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).\end{aligned}$$

(*u*) Équation du lieu dans le cas ou le point est rejeté a l'infini. — Soient la direction définie par les cosinus α, β, et (x_0, y_0) un point du lieu : l'équation de la

transversale correspondante est

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho.$$

Les distances de ce point (x_0, y_0) aux deux coniques sont racines de deux équations de la forme

$$\rho^2 + p\rho + q = 0,$$

$$\rho^2 + p'\rho + q' = 0.$$

Si (x_0, y_0) est un point du lieu, on a

$$\text{OA} \times \text{OA}' = \text{OB} \times \text{OB}';$$

donc

$$q = q'.$$

Telle est la relation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x_0, y_0; donc c'est l'équation du lieu.

Si l'on développe les calculs, on trouve

$$\begin{aligned}(\text{A}'\alpha^2 + 2\text{B}'\alpha\beta + \text{C}'\beta^2)(\text{A}x^2 + 2\text{B}xy + \text{C}y^2 + 2\text{D}x + 2\text{E}y + \text{F})\\ = (\text{A}\alpha^2 + 2\text{B}\alpha\beta + \text{C}\beta^2)\\ \times (\text{A}'x^2 + 2\text{B}'xy + \text{C}'y^2 + 2\text{D}'x + 2\text{F}'y + \text{F}).\end{aligned}$$

(ν) Un cas particulier. — Il nous resterait à *étudier* les propriétés et déformations successives que subit la courbe :

1° Lorsque le point P est successivement : point double réel, point de rebroussement, point isolé;

2° Lorsque le lieu se décompose.

Quoique ces deux questions offrent de l'intérêt, nous ne les traiterons pas, vu la longueur des considérations précédentes; il est cependant indispensable d'énumérer au moins les résultats que donne le cas particulier demandé au Concours d'admission.

Soient α, β les coordonnées du point P par rapport

aux axes du rectangle, a et b les demi-longueurs des côtés.

Si l'on transporte l'origine au point P, les équations des deux coniques passant par les quatre points sont

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - a^2 = 0,$$
$$y^2 + 2\beta y + \beta^2 - b^2 = 0;$$

le point double est réel s'il est dans l'intérieur du rectangle ou dans les angles opposés à l'intérieur, et on trouve pour équation du lieu

$$2xy(\alpha y - \beta x) + (\alpha^2 - a^2)y^2 - (\beta^2 - b^2)x^2 = 0.$$

SOLUTION DU PROBLÈME DONNÉ AUX EXAMENS DE LA LICENCE (Novembre 1868);

Par M. Léon GEOFFROY,
Ingénieur, Professeur de Mathématiques.

Trouver une surface de révolution telle, que les rayons de courbure principaux soient en chaque point égaux et dirigés en sens contraire.

Dans une surface de révolution les rayons de courbure principaux sont, d'une part, celui de la courbe méridienne au point considéré; d'autre part, la partie de la normale comprise entre l'axe et la surface.

Toute la question se réduit à trouver la courbe méridienne, et on voit que cette courbe doit être telle, que sa normale en chaque point soit égale au rayon de courbure et dirigée en sens contraire.

Prenons l'axe de la surface pour axe des x, les coordonnées étant rectangulaires.

La normale a pour valeur

$$y\sqrt{1+y'^2},$$

le rayon de courbure a pour expression

$$-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

En écrivant que ces deux expressions sont égales, au signe près, on trouve l'équation différentielle de la méridienne

$$y = \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Posons

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx}, \quad dx = \frac{dy}{p}:$$

en substituant il vient

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2} = 2\,\frac{dy}{y};$$

et, en intégrant,

$$\text{log néper}(1+p^2) = 2\log' \mathrm{Y} - 2\log' \mathrm{A} = \text{log nép}\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}}\right)^2,$$

d'où

$$p = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}}\right)^2 - 1}:$$

or

$$p = \frac{dy}{dx},$$

donc

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}}\right)^2 - 1}};$$

d'où

$$x = \text{log nép}\left[\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}}\right)^2 - 1}\right] + \mathrm{C}$$

ou bien

$$e^{t-C} = \frac{Y}{A} + \sqrt{\left(\frac{Y}{A}\right)^2 - 1};$$

de là on déduit

$$Y = \frac{A}{2}\left(e^{t-C} + e^{-(t-C)}\right),$$

équation d'une chaînette dont l'axe est perpendiculaire à l'axe de la surface. Les constantes A et C se détermineront facilement, en disposant de l'axe des Y, et en plaçant la courbe de manière que la normale au sommet soit égale au rayon de courbure en ce point.

NOTE SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES;

Par M. LE BESGUE.

L'impossibilité de la résolution en nombres entiers d'une équation indéterminée

$$f(x, y, z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots),$$

où f et φ représentent des fonctions entières ou sommes de termes $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$ (A étant un entier positif ou négatif; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des entiers positifs ou nuls, et $x, y, z, \ldots$ des entiers positifs, négatifs ou nuls), est quelquefois rendue évidente en donnant à l'équation certaines formes particulières, par exemple celle-ci

$$mt + r = mu + r',$$

m étant un entier positif; t, u des entiers de même signe, aussi bien que r et r' supposés $< m$ en valeur absolue.

Si r et r' sont différents, il y a évidemment impossibilité : c'est le cas de $f(x, y, z, \ldots)$ et $\varphi(x, y, z, \ldots)$ *non*

congrus pour un certain module m convenablement choisi.

Le cas de $r = 0$ et r' autre que 0 est un cas particulier qui se présente assez souvent.

(A) Voici un exemple pour ce dernier cas.

$x^2 + y^2 = (4a + 3)z$ est impossible (x, y premiers entre eux).

Démonstration. $4a + 3$ étant décomposé en ses facteurs premiers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, il doit y en avoir un nombre impair de la forme $4b + 3$. Soit donc

$$x^2 = (4b + 3)t - y^2;$$

d'où, en élevant à la puissance $2b + 1$,

$$x^{4b+2} = (4b + 3)\mathrm{U} - y^{4b+2},$$

où U est entier. Le théorème de Fermat réduit cette équation à

$$(4b + 3)v + 1 = (4b + 3)w - 1,$$

où v et w sont entiers ; or cela est impossible.

(B) Voici un autre exemple, question :

L'équation $x^2 = y^3 + 7$ est impossible en nombres entiers :

1° Pour y pair on a

$$x^2 = 8v^3 + 7;$$

donc x est impair ; $x = 2z + 1$ donne

$$x^2 = 4z(z + 1) + 1 = 8u + 1,$$

u entier ; or $8u + 1 = 8v^3 + 7$ est impossible.

2° y impair :

$$x^2 + 1 = y^3 + 8 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$$
$$= (y + 2)[(y - 1)^2 + 3].$$

Or $(y-1)^2+3$, pour $y-1$ pair, a un diviseur premier de la forme $4b+3$; l'équation est donc impossible.

(C) Autre exemple :

$x^3 \pm y^3 = 9z + r$ est impossible pour $r = 3, 4, 5, 6$: c'est la question 902 traitée par M. *Laisant*.

$\pm x$, $\pm y$ ayant l'une des formes $3t$, $3t+1$, $3t+2$, le premier membre ne peut prendre que l'une des formes

$$9\rho + 0, 1, 2, 7, 8.$$

Cette impossibilité par *non-congruence* a été appliquée à quelques cas particuliers de l'équation

$$x^m + y^m = z^m,$$

x, y, z entiers, m premier impair; par exemple : $m = 3$, $m = 7$.

Peut-on démontrer d'autres cas particuliers par la même méthode, sans introduire des nombres imaginaires formés avec les racines de l'unité?

Note du Rédacteur. — La démonstration relative à l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^2 = y^3 + 7$, dans le cas (2°) de y impair, a été fondée sur ce principe que :

Tout diviseur de la somme, x^2+1, de deux carrés premiers entre eux est également la somme de deux carrés premiers entre eux.

Or, $(y-1)^2+3$ étant de la forme $4b+3$, ne peut être la somme de deux carrés; donc, etc.

Le théorème que nous venons d'énoncer au sujet des diviseurs de la somme des carrés de deux nombres premiers entre eux est démontré dans la *Théorie des Nombres* de Legendre. Ce théorème a d'abord été déduit de propositions plus générales dues à Lagrange, et cette dé-

duction ne peut donner lieu à aucune objection. Mais, à la suite, on lit (p. 203, t. I, 3e édition) :

« *Ce théorème étant d'un très-grand usage dans la Théorie des Nombres, nous croyons devoir en donner une seconde démonstration fondée sur d'autres principes.* »

Il nous semble que cette seconde démonstration est au moins incomplète. Nous allons dire pourquoi.

En nommant N un diviseur de la somme $t^2 + u^2$ des carrés, t^2, u^2 *premiers entre eux*, et N'' un nombre entier moindre que $\frac{1}{4}$ N, l'auteur établit l'égalité

$$(N - \alpha t - \beta u)^2 + (\alpha u - \beta t)^2 = NN'',$$

où α, β sont des nombres entiers satisfaisant à une condition indiquée. Puis, il ajoute :

« *Si dans ce nouveau résultat on avait* $N'' = 1$, *le nombre* N *serait égal à la somme de deux carrés, et la proposition serait démontrée.* »

Sans doute, parce qu'il est facile de voir que si $N'' = 1$, les deux nombres $N - \alpha t - \beta u$ et $\alpha u - \beta t$ sont premiers entre eux.

« *Soit donc encore* $N'' > 1$, *alors en suivant la même marche, on déduirait du produit* NN'' *un nouveau produit* NN''', *où l'on aurait* $N''' < \frac{1}{2} N''$, *et qui sera exprimé pareillement par la somme de deux carrés, etc.* »

Mais, pour suivre la MÊME MARCHE, il faudrait que les deux nombres

$$N - \alpha t - \beta u \quad \text{et} \quad \alpha u - \beta t$$

fussent premiers entre eux; et c'est ce qui ne résulte pas de la démonstration dont il s'agit.

Au reste, cette démonstration s'applique clairement

au cas où le diviseur N est premier; le principe étant établi pour ce cas particulier, on peut assez simplement faire voir qu'il est général, en décomposant le diviseur considéré N en ses facteurs premiers. (G.)

SUR UN PARADOXE ALGÉBRIQUE;

Par M. E. CATALAN.

Un ouvrage remarquable, récemment publié (*), contient, parmi beaucoup de bonnes choses, les deux propositions suivantes :

« ... Dans la suite d'égalités

(A) $$e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}} = \ldots = e^{2k\pi\sqrt{-1}},$$

qu'on élève tous les membres à la puissance $\sqrt{-1}$, et l'on aura

(B) $$e^{-2\pi} = e^{-4\pi} = e^{-6\pi} = \ldots = e^{-2k\pi},$$

conséquence complétement inadmissible (p. 254). »

. . . .

« On est par conséquent autorisé à substituer à la formule non démontrée d'Euler, la suivante :

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

ou, si l'on veut,

(C) $$(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

dont la justification est parfaitement établie (p. 257). »

(*) *Des formes imaginaires; leur interprétation en abstrait et en concret*; par M. Vallès, ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées. Paris; Gauthier-Villars; 1869.

Les assertions de l'honorable auteur sont trop graves pour passer inaperçues. Je vais donc essayer de montrer : 1° que la formule *proposée* (C) est loin d'être préférable à celle d'Euler ; 2° que les égalités (B) ne sont pas des *conséquences* de (A).

I.

Considérons d'abord la relation (C). Si l'on y suppose

$$\alpha = \frac{p}{q}\pi,$$

p et q étant des entiers premiers entre eux, elle devient

$$\text{(D)} \qquad (-1)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}\pi.$$

Celle-ci, *évidente* lorsque $q = 1$, n'est pas admissible en général. En effet, le premier membre a q valeurs, et le second en a seulement *une*. Comme l'apprend la théorie des équations binômes, ce second membre doit être remplacé par

$$\cos\frac{2k\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{q},$$

si p est pair ; et par

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{q},$$

si p est *impair*.

II.

J'arrive maintenant à l'équation *absurde*

$$\text{(B)} \qquad e^{-2\pi} = e^{-4\pi},$$

déduite de l'équation *exacte*

$$\text{(A)} \qquad e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}.$$

Par *définition*, $e^{2k\pi\sqrt{-1}} = \cos 2k\pi + \sqrt{-1}\sin 2k\pi = 1$. Ainsi, déjà, *chacun des deux membres de l'équation* (A) *représente l'unité*. D'un autre côté, l'expression « *puissance* $\sqrt{-1}$ » n'ayant aucun sens *à priori*, nous admettrons que $(e^{2k\pi\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}} = 1^{\sqrt{-1}}$; et il nous suffira de définir ce dernier symbole.

Or, si l'on fait

$$1^{\sqrt{-1}} = y,$$

on a, en général (*),

$$ly = \sqrt{-1}\, l(1) = \sqrt{-1}\,.\,2k'\pi\sqrt{-1} = -2k'\pi;$$

donc

$$y = e^{-2k'\pi}.$$

Autrement dit :

La puissance $\sqrt{-1}$ *de l'expression* $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ *a une infinité de valeurs réelles, inégales, et formant une progression par quotient*. En particulier, si l'on élève à la puissance marquée par $\sqrt{-1}$, les deux expressions (A), égales chacune à l'unité, on reproduit deux fois cette progression. Mais *de ce que* $e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}$, *on ne peut pas conclure* $e^{-2\pi} = e^{-4\pi}$.

NOTE SUR LES TANGENTES COMMUNES A DEUX CERCLES;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Les Traités de Géométrie qui donnent la construction des tangentes communes à deux cercles négligent ordinairement une vérification très-simple.

(*) *Voir*, par exemple, le *Cours d'Analyse* de STURM.

Soient O, C les centres des deux cercles, A l'intersection d'une tangente intérieure et d'une tangente extérieure; il est visible que AO et AC sont bissectrices des angles de ces tangentes; d'où il résulte que l'angle OAC est droit, et que la circonférence décrite sur OC comme diamètre passe par les quatre points où les tangentes intérieures rencontrent les tangentes extérieures.

Si les tangentes deviennent imaginaires, le théorème n'a plus d'utilité graphique; mais il reste analytiquement vrai.

Soient

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$
$$(x - d)^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

les équations des deux cercles donnés, les équations des tangentes sont

$$\pm y\sqrt{d^2 - (R - r)^2} = (R - r)x - dR,$$
$$\pm y\sqrt{d^2 - (R + r)^2} = (R + r)x - dR;$$

j'élève au carré ces deux équations, je les retranche membre à membre et je supprime le facteur commun $4Rr$: il vient

$$y^2 = dx - x^2,$$

qui est justement l'équation du cercle ayant pour diamètre la distance des centres donnés.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 858

(voir 2e série, t. VII, p. 190);

PAR M. FARINEAU,
Élève du lycée de Lille (Classe de M. Diguet).

D'un point M *situé dans le plan d'une conique, on mène à celle-ci les deux tangentes* MA *et* MB, *puis par* M *on mène une droite* MC.

Aux points A *et* B, *on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à* MC.

Démontrer que : 1° *ces coniques touchent* MC *au même point* C; 2° *si l'on faisait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de* MC, *du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre.*

(A. RIBAUCOUR.)

1° Je m'appuierai sur cette proposition :

Si deux coniques ont quatre points confondus, la polaire d'un point de la tangente commune est la même pour les deux coniques.

On la démontre facilement en prenant pour axe des y la tangente, pour axe des x une droite quelconque, pour origine le point quadruple. Les équations des coniques sont alors

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2x = 0,$$

$$a'x^2 + 2bxy + cy^2 + 2x = 0;$$

la polaire d'un point de l'axe des y dont l'ordonnée est β est

$$\beta f'_y + 2x = 0,$$

et on voit que cette droite est la même pour les deux coniques.

Il résulte de là que la polaire du point M par rapport aux deux premières coniques est la même, c'est-à-dire que les trois points A, C, B sont en ligne droite; ce qui démontre la première partie du théorème.

2° La seconde partie du théorème est inexacte, excepté dans le cas où la droite MC est perpendiculaire à AB.

En effet, je suppose l'angle MCA aigu. Quand on rabattra la conique inférieure autour de MC, la droite AC se placera dans l'angle BCM. Or, si les deux coniques avaient alors en C quatre points confondus, les polaires AC et BC du point M seraient confondues, ce qui n'a lieu que lorsque MC est perpendiculaire à AB.

Je vais démontrer seulement que les deux coniques, après le rabattement, ont un contact du second ordre, c'est-à-dire trois points confondus.

Je prends le point C pour origine; pour axe des x, CM; pour axe des y, AB. L'équation de la première conique est

$$[y + m(x - a)][y + m'(x - a)] + \lambda x^2 = 0;$$

les équations des coniques qui ont quatre points confondus avec la précédente en A et B sont

$$(1) \qquad y[y + m(x - a)] + \frac{m\lambda}{m - m'} x^2 = 0,$$

$$(2) \qquad y[y + m'(x - a)] + \frac{m'\lambda}{m' - m} x^2 = 0.$$

Je prends pour axe des y une perpendiculaire à CM,

CM restant l'axe des x. Les formules de transformation sont

$$x = X - Y\cot\theta, \quad y = \frac{Y}{\sin\theta}, \quad \theta = \text{ang BCM};$$

les équations (1) et (2) deviennent

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y}{\sin\theta}\left[\dfrac{y}{\sin\theta} + m(x - a - y\cot\theta)\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{m\lambda}{m - m'}(x - y\cot\theta)^2 = 0, \end{array} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y}{\sin\theta}\left[\dfrac{y}{\sin\theta} + m'(x - a - y\cot\theta)\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{m'\lambda}{m' - m}(x - y\cot\theta)^2 = 0. \end{array} \right.$$

L'équation de la courbe (4) rabattue autour de MC s'obtiendra en changeant y en $-y$; ce sera

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y}{\sin\theta}\left[-\dfrac{y}{\sin\theta} + m'(x - a + y\cot\theta)\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{m'\lambda}{m - m'}(x + y\cot\theta)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Je cherche un couple de sécantes communes aux courbes (3) et (4), et pour cela je les ajoute, après les avoir multipliées par m' et $-m$. Il vient

$$y\left[\frac{y(m + m')}{\sin\theta} - 2mm'\cot\theta\, y - \frac{4\lambda mm'}{m - m'}\cos\theta\, x\right] = 0,$$

équation qui donne deux droites : l'une est MC, l'autre passe par l'origine

$$y(m + m' - 2mm'\cos\theta) - \frac{2\lambda mm'}{m - m'}\sin 2\theta\, x = 0.$$

Pour que les deux coniques aient un contact du troisième ordre, il faut que cette sécante se confonde avec MC, c'est-à-dire que son équation soit identique avec $y = 0$; ce qui aura lieu si le coefficient de x est nul, c'est-à-dire

si $\sin 2\theta = 0$, ce qui donne

$$\theta = 90°.$$

Ainsi l'on retombe sur la condition trouvée précédemment.

On peut démontrer plus simplement que les deux coniques ont même cercle osculateur en C.

Je fais tourner la conique inférieure autour de C jusqu'à ce que CB se place dans la direction CA; et CM', prolongement de CM, dans la direction CM. Les deux coniques sont alors du même côté de CM. Or cette rotation revient à changer la direction des axes de la seconde conique : on aura donc son équation en changeant x en $-x$, y en $-y$ dans l'équation (2), ce qui donne

$$(6) \qquad y[y + m'(x + a)] + \frac{m'\lambda}{m' - m} x^2 = 0.$$

J'ajoute les équations (1) et (6) multipliées par m' et par m, j'ai

$$y[y(m + m') + 2mm'x] = 0,$$

$$y = 0,$$

$$y(m + m') + 2mm'x = 0.$$

Donc les deux coniques ont bien en C trois points confondus.

Note. — Solutions peu différentes de MM. Kaher Bey et A. Lemaître, Répétiteur au lycée de Besançon.

Question 870

(voir 2e série, t. VII, p. 237).

PAR M. BROCARD,
Sous-lieutenant du Génie.

Lieu des centres de courbure principaux correspondants aux points d'une surface gauche qui sont situés sur une génératrice. (DARBOUX.)

Remplaçons la surface gauche par son hyperboloïde osculateur le long de la génératrice considérée. En prenant cette génératrice pour axe des z, l'équation de cet hyperboloïde sera

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2C'x + 2C'y = 0.$$

Les sections principales, qui renferment les centres de courbure dont on demande le lieu, sont formées par les plans

$$z = \gamma,$$

et l'une quelconque d'entre elles a pour projection sur le plan des xy la conique

$$(1)\quad Ax^2 + 2Bxy + A'y^2 + 2(B'\gamma + C)x + 2(B\gamma + C')y = 0$$

qui passe par l'origine.

Le centre de courbure principal est le centre de courbure correspondant à l'origine, et il a pour coordonnées

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \end{cases}$$

expressions dans lesquelles $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ont les valeurs correspondantes à $x = 0$, $y = 0$.

Deux différentiations successives de l'équation (1) donnent

$$Ax + By + B'\gamma + C + \frac{dy}{dx}(A'y + Bx + B\gamma + C') = 0,$$

$$A + B\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(A'\frac{dy}{dx} + B\right) + \frac{d^2y}{dx^2}(A'y + Bx + B\gamma + C') = 0.$$

On en tire, après avoir fait $x = y = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B'\gamma + C}{B\gamma + C'},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{A(B\gamma + C')^2 - 2B(B\gamma + C')(B'\gamma + C) + A'(B'\gamma + C)^2}{(B\gamma + C')^3}.$$

En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par leurs valeurs dans les équations (2), puis γ par z, on aurait les équations de la courbe lieu des centres de courbure demandé. En divisant membre à membre les équations (2) on a, en supprimant les accents,

$$\frac{y}{x} = \frac{Bz + C'}{B'z + C}$$

ou

$$B'yz - Bxz + Cy - C'x = 0:$$

c'est l'équation du paraboloïde des normales à la surface gauche le long de la génératrice Oz. On en tire

$$z = \frac{C'x - Cy}{B'y - Bx},$$

et en portant dans l'une des équations (2) on a

$$y(B'y - Bx)(Ay^2 + A'x^2 - 2Bxy) = x(B'C' - BC)(x^2 + y^2),$$

qui représente le cylindre projetant la courbe sur le plan des xy. La courbe elle-même est l'intersection de ce cylindre avec le paraboloïde des normales.

Note. — La même question a été résolue par M. Pellet.

Question 871

(voir 2e série, t. VII, p. 237);

PAR M. E. PELLET.

Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse et à toutes les hyperboles équilatères qui

ont même centre que l'ellipse et qui passent par ses foyers. (DARBOUX.)

L'équation de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

l'équation d'une des hyperboles équilatères sera

$$x^2-y^2+2Bxy-c^2=0.$$

Pour que la droite

$$(1)\qquad \frac{x\cos u}{a}+\frac{y\sin u}{b}=1,$$

qui est tangente à l'ellipse, soit tangente à l'hyperbole, il faut que l'on ait

$$(2)\quad (B^2a^2b^2+a^4)\operatorname{tang}^2 u-2Babc^2\operatorname{tang} u+B^2a^2b^2+b^4=0.$$

Or si, dans l'équation (1), on remplace $\sin u$ et $\cos u$ par leurs expressions en fonction de $\operatorname{tang} u$, on obtient

$$(3)\qquad \left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)\operatorname{tang}^2 u+2\frac{xy}{ab}\operatorname{tang} u+\frac{x^2}{a^2}-1=0;$$

et si le point (x, y) est l'intersection de deux tangentes communes, les équations (2) et (3) donnent les mêmes valeurs de $\operatorname{tang} u$; elles sont identiques, et l'on a

$$\frac{B^2a^2b^2+a^4}{\frac{y^2}{b^2}-1}=\frac{B^2a^2b^2+b^4}{\frac{x^2}{a^2}-1}=-\frac{B^2a^2b^2c^2}{xy}.$$

En éliminant B entre ces deux dernières équations, on trouve pour équation du lieu

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2-(a^4-b^4)(b^2x^2-a^2y^2)=0.$$

Cette équation représente une courbe fermée, dont l'origine est un point double, et qui est entièrement comprise entre les droites $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ et $x^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^2}$.

Question 897

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 557).

Par M. SCHLEGEL,

Étudiant en Mathématiques à Berlin.

1° *Soient* P *un point variable d'une courbe plane donnée* (A), O *un point fixe et* Q *le sommet d'une hyperbole équilatère dont le centre est en* O *et qui touche la courbe donnée en* P. *Montrer que la tangente en* Q *à la courbe lieu du point* Q *fait avec* OQ *un angle égal à celui que fait* OP *avec la tangente à* (A) *en* P.

2° *La courbe* (B), *inverse du lieu de* Q *par rapport à l'origine* O, *sera réciproque à la courbe donnée; c'est-à-dire que si* B *est regardée comme donnée, la courbe primitive* (A) *en dérivera précisément comme* (B) *dérive de* (A). (W. Roberts.)

En employant les coordonnées polaires et en prenant le point O pour pôle, on a pour l'équation d'une hyperbole équilatère

$$(1) \qquad r^2 \sin 2(\varphi - \theta) = a^2$$

où r et φ désignent les coordonnées, θ l'angle que fait l'axe polaire avec une asymptote, et a la distance du sommet de l'hyperbole à son centre. Les sommets de l'hyperbole

30.

ont les coordonnées

$$r = a,$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{4}$$

et

$$r = a,$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{4} + \pi.$$

θ et a sont donc deux paramètres variables qui sont déterminés par la condition que la courbe (A) et l'hyperbole se touchent. L'équation de la courbe (A) étant

$$(2) \qquad f(r, \varphi) = 0,$$

l'angle ψ que fait la tangente au point $P(r_1, \varphi_1)$ satisfera à l'équation

$$\cot\psi = \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{d\varphi_1}.$$

Pour l'hyperbole, on a donc

$$\cot\psi = \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{d\varphi_1} = -\cot 2(\varphi_1 - \theta).$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que les deux courbes se touchent est

$$\cot 2(\varphi_1 - \theta) = -\frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{d\varphi_1}.$$

Cette équation donne la valeur de θ. On ne prend qu'une valeur correspondante pour a dans l'équation

$$r_1^2 \sin 2(\varphi_1 - \theta) = a^2,$$

parce que nous supposons a toujours positif. L'équation de la courbe lieu du sommet Q s'obtient donc en élimi-

nant r_1, φ_1, a et θ entre les équations

$$r = a, \quad a^2 = r_1^2 \sin 2(\varphi_1 - \theta), \quad \varphi = \theta + \frac{\pi}{\psi},$$

$$\cot 2(\varphi_1 - \theta) = -\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1}, \quad f(r_1 \varphi_1) = 0.$$

Il en résulte

$$(3) \qquad r^2 = r_1^2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi),$$

$$(4) \qquad \operatorname{tang} 2(\varphi_1 - \varphi) = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1}.$$

En prenant les logarithmes des deux membres de l'équation (3) et différentiant par rapport à φ en considérant φ_1 comme fonction de φ on trouve

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi} - \operatorname{tang} 2(\varphi_1 - \varphi)\left(\frac{d\varphi_1}{d\varphi} - 1\right).$$

Cette formule donne, en ayant égard à l'équation (4),

$$(5) \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1};$$

d'où résulte immédiatement le théorème 1°.

On obtient l'équation de la courbe (B) en substituant, dans l'équation de la courbe lieu du sommet Q, à r, $\frac{1}{r}$; il s'ensuit

$$(6) \qquad \begin{cases} 1 = r^2 r_1^2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi) \quad \text{ou} \quad 1 = r_1^2 r^2 \cos 2(\varphi - \varphi_1) \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\varphi} = \dfrac{1}{r_1}\dfrac{dr_1}{d\varphi}, \end{cases}$$

$$(7) \qquad \operatorname{tang} 2(\varphi_1 - \varphi) = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} 2(\varphi - \varphi_1) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}.$$

On voit que les équations (6) et (7) restent les mêmes si l'on change r en r_1, φ en φ_1, et inversement. Donc la

courbe (B) sera réciproque à la courbe donnée (A) dans le sens fixé.

Note. — **La question a été, de même, résolue par MM. Doucet, et Jules Lefebvre, élève à l'École Normale supérieure.**

Question 898

(voir 2e série, t. VIII, p. 45);

Par M. WILLIÈRE.

On donne un cercle C *tangent à une droite* D *en* O. *D'un point* M *de la circonférence on mène* MA *perpendiculaire à* D, *et l'on prend* AB = AO. *On joint* BM, *et l'on demande l'enveloppe de la droite* BM *quand le point* M *se déplace sur la circonférence. L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables.* (H. Brocard.)

Je prends pour axe des x la tangente D et pour axe des y le diamètre perpendiculaire; l'équation du cercle sera

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0$$

et celle de la droite BM

(1) $$x'y + y'x - 2x'y' = 0.$$

Les coordonnées x', y' étant liées par la relation

(2) $$x'^2 + y'^2 - 2Ry' = 0,$$

l'équation (1) donne

$$x' = -\frac{y'x}{y - 2y'}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (2), celle-ci devient

$$\frac{y'^2x^2}{(y-2y')^2} + y'^2 - 2Ry' = 0$$

ou

$$4y'^3 - 4y'^2(y+2R) + y'(x^2+y^2+8Ry) - 2Ry^2 = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe demandée, il reste à éliminer y' entre cette équation et l'équation dérivée

$$12y'^2 - 8y'(y+2R) + x^2 + y^2 + 8Ry = 0,$$

ce qui donne le déterminant

$$\begin{vmatrix} 6 & -(y+2R) & x^2+y^2+8Ry \\ -8(y+2R) & x^2+y^2+8Ry & 6Ry^2-(y+2R)(x^2+y^2+8Ry) \\ x^2+y^2+8By & -3Ry^2 & 4Ry^2(y+2R) \end{vmatrix} = 0$$

ou l'équation

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 20Rx^2y - 12Ry^3$$
$$- 4R^2x^2 + 48R^2y^2 - 64R^3y = 0.$$

Prenons les dérivées par rapport à x et à y, nous aurons les équations

$$(3)\quad \frac{df}{dx} = x(x^2+y^2+10Ry-2R^2) = 0,$$

$$(4)\quad \frac{df}{dy} = y^3 + x^2y + 5Rx^2 - 9Ry^2 + 24R^2y - 16R^3 = 0.$$

La première donne immédiatement $x = 0$; cette valeur, substituée dans la seconde, fournit l'équation du troisième degré en y

$$y^3 - 9Ry^2 + 24R^2y - 16R^3 = 0,$$

qui est satisfaite pour $y = 4R$; d'ailleurs l'équation de l'enveloppe est aussi satisfaite pour $x = 0$, $y = 4R$; et pour toute valeur de y plus grande que $4R$, elle donne pour x des valeurs imaginaires; donc l'enveloppe a un point de rebroussement sur l'axe des y, qui est un axe de symétrie, puisque l'équation ne renferme que des puissances paires de x.

L'équation (3) donne encore

$$x^2 = 2R^2 - y^2 - 10Ry;$$

substituant cette valeur de x^2 dans l'équation (4), il vient

$$4y^2 + 4Ry + R^2 = 0$$

ou

$$(2y + R)^2 = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{R}{2},$$

et, par suite,

$$x = \pm \frac{R}{2}\sqrt{27}.$$

Ces valeurs vérifient aussi l'équation de la courbe; donc elles représentent les coordonnées de deux autres points de rebroussement, situés sur les axes de symétrie :

$$y - \frac{x}{\sqrt{3}} = R,$$

$$y + \frac{x}{\sqrt{3}} = R.$$

L'enveloppe touche le cercle (C) en trois points, qui sont les sommets du triangle équilatéral inscrit. Les hauteurs de ce triangle sont les trois axes de symétrie.

Note. — Cette question a été résolue par MM. H. Brocard, H. Janssen, C. Despinoy, Guébhard, Cahen, Jasseron, Kiepert, Millasseau.

CORRESPONDANCE.

1. Un *abonné* nous a écrit, il y a déjà quelque temps (*), pour savoir où l'on trouve la démonstration de la proposition suivante, attribuée à Joachimstal :

(*) Il aurait reçu plus tôt notre réponse, s'il *nous* avait fait connaître son nom et sa demeure.

Si l'on fait passer une circonférence par les pieds de trois quelconques des quatre normales menées d'un point à une ellipse, le quatrième point commun aux deux courbes sera diamétralement opposé, sur l'ellipse, au pied de la quatrième normale.

Ce théorème a été démontré dans les *Nouvelles Annales* (t. VI, p. 241, 1re série). Nous en donnerons ici une autre démonstration fondée sur cette remarque qu'*il est toujours possible de faire passer une circonférence par les quatre points communs à deux lignes du second degré représentées, en coordonnées rectangulaires, par des équations privées du rectangle des variables.*

C'est ce qui résulte d'un calcul très-simple; car, si les deux lignes considérées ont pour équations

$$A\,x^2 + C\,y^2 + D\,x + \ldots = 0,$$
$$A'x^2 + C'y^2 + D'x + \ldots = 0,$$

toute conique passant par leurs quatre points d'intersection aura, comme on sait, une équation de la forme

$$(A' - \lambda A)x^2 + (C' - \lambda C)y^2 + (D - \lambda D')x + \ldots = 0,$$

et inversement, quelle que soit la valeur de λ : l'équation précédente est celle d'une conique passant par les quatre points communs aux deux premières lignes.

Or, en disposant de l'indéterminée λ de manière que $A' - \lambda A = C' - \lambda C$ (*), cette équation représente une circonférence.

(*) L'égalité $A' - \lambda A = C' - \lambda C$ donne $\lambda = \dfrac{A' - C'}{A - C}$, valeur réelle, et qui est finie; car, si l'on avait $A - C = 0$, l'une des deux lignes données serait une circonférence, et, dans ce cas, il n'y a pas lieu à démonstration.

Revenons maintenant au théorème de Joachimstal.

Soient A, B, C, D les pieds des quatre normales menées d'un point P à une ellipse; O le centre de cette courbe, et $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$, son équation, en coordonnées rectangulaires.

De l'un quelconque des points A, B, C, D, par exemple du point D, on mène le diamètre DOD'; et il s'agit de faire voir que les quatre points A, B, C, D' appartiennent à une même circonférence.

A cet effet, nommons α, β les coordonnées du point P, et x, y celles du pied de l'une des normales menées du point P à l'ellipse. Nous aurons

$$(1)\qquad a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0,$$

$$(2)\qquad c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0,$$

en posant

$$a^2-b^2=c^2,$$

et par suite l'équation

$$(3)\qquad a^2y^2+b^2x^2+\lambda c^2xy+\lambda b^2\beta x-\lambda a^2\alpha y-a^2b^2=0,$$

où λ désigne une racine de l'équation du troisième degré qui détermine les trois systèmes de deux droites passant par les points A, B, C, D.

En prenant pour λ la racine correspondant au système des deux droites AD, BC, il suffira pour déterminer les coefficients angulaires m et m' de ces droites, d'égaler à zéro les termes du second degré de l'équation (3), et de résoudre l'équation résultante, par rapport à $\frac{y}{x}$; on a donc évidemment

$$mm'=\frac{b^2}{a^2},$$

égalité qui montre que le produit des coefficients angu-

laires des deux droites AD, BC est indépendant de la position du point P, et qu'il reste le même pour chacun des trois systèmes de deux droites passant par les points A, B, C, D, pieds des quatre normales menées du point P à l'ellipse.

En désignant par m'' le coefficient angulaire de la corde AD′, supplémentaire de AD, on aura

$$mm'' = -\frac{b^2}{a^2};$$

donc

$$m'' = -m',$$

c'est-à-dire que les coefficients angulaires des cordes AD′ et BC sont égaux et de signes contraires. Il en résulte que la ligne du second degré composée de ces deux cordes est représentée par une équation de la forme

$$(y - m'x - n')(y + m'x - n'') = 0,$$

qui est indépendante du rectangle des variables. Or, il en est de même de l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0;$$

par conséquent, les quatre points A, B, C, D′, communs à ces deux lignes, appartiennent à une même circonférence. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Lorsque l'on connaît deux des quatre normales menées d'un point à l'ellipse, il est facile d'obtenir les deux autres. Car, en considérant toujours l'équation (3) comme représentant l'un des systèmes de deux droites qui rencontrent la courbe aux points A, B, C, D, on voit que le produit des distances du centre de l'ellipse aux points où ces droites coupent le grand axe $2a$ est égal à $-a^2$, et que le produit des distances de ce centre aux points d'intersection des mêmes droites et du second axe $2b$ a pour

valeur $-b^2$. Ainsi, lorsqu'une des droites sera donnée, on obtiendra immédiatement l'autre en déterminant ses points d'intersection avec les deux axes de l'ellipse.

2. Nous devons à l'obligeance de l'un de nos lecteurs une rectification qui n'est pas sans importance : la démonstration qu'on a donnée (2e série, t. VII, p. 240) du théorème énoncé sous le n° 61 est incomplète. C'est donc à tort que dans la Table des Matières du tome VII (année 1868), la question 61 a été placée au nombre des questions résolues.

3. Une solution géométrique et très-exacte de la question 905 nous a été adressée en avril dernier par M. *Mas* (*François*), élève au lycée de Toulouse; c'est par oubli que la solution de M. Mas n'a pas été mentionnée dans le numéro de mai, p. 238. Nous avons à réparer une omission semblable à l'égard de M. *Demartres*, à Mézin, et de M. *Guébhard*, étudiant en médecine, pour leurs solutions des questions 902 et 901. Enfin, la même réparation est due à M. *Netto*, étudiant en Mathématiques à Berlin, qui a résolu la question 930.

4. Un Professeur, *ami du progrès et de la clarté*, exprime le regret de n'avoir pas suffisamment compris plusieurs des articles insérés dans les *Nouvelles Annales*, et notamment ceux qui concernent la *métaphysique du calcul des expressions négatives et imaginaires*. Il désirerait plus de développements sur ce sujet. Pour répondre à ce désir, nous ne croyons pouvoir mieux faire que de conseiller la lecture de l'ouvrage intitulé : *Des formes imaginaires en algèbre; leur interprétation en abstrait et en concret*; par M. F. Vallès, Inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, Membre des Académies de Laon et de Cherbourg.

L'Auteur a, dans 300 pages d'impression, donné à ses idées sur cette matière tout le développement qu'il est possible de désirer. (G.)

BIBLIOGRAPHIE.

Revue des publications étrangères.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*. Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, via Lata, n° 211 (*).

Nous avons déjà fait connaître les titres des Mémoires insérés dans quelques cahiers de cet intéressant et instructif recueil (*voir* les numéros d'août 1868 et de juin 1869 des *Nouvelles Annales*); nous ajoutons ici la Table des Matières des cahiers qui n'ont pas encore été mentionnés.

Tome I (1868).

Mai. — Notice sur Ludolphe van Colen, par M.-G.-A. Vorsterman van Oijen (textes anciens sur les verres comburants par réfraction). Extrait de deux lettres adressées par M. *Th. Henri Martin* à *D.-B. Boncompagni*, en date de Rennes 23 et 26 mars 1868.

De l'Astronomie et des Mathématiques chez les Chinois. Lettre de M. *L.-Am. Sédillot* à *D.-B. Boncompagni*.

(*) Le *Bulletin de Bibliographie et d'Histoire des Sciences mathématiques et physiques* est un recueil périodique dont on publie chaque mois un cahier de trois feuilles au moins et de cinq au plus. Ces cahiers se vendent à Rome, dans l'imprimerie des Sciences mathématiques et physiques (via Lata, 211), au prix de 35 centimes la feuille. Les personnes qui voudront bien envoyer des écrits destinés à être publiés dans ce recueil sont priées de les remettre aux bureaux de la poste dans des plis adressés à M. B. Boncompagni.

Ceux de ces écrits qui sont rédigés en italien, en français ou en latin seront publiés textuellement dans ce Bulletin.

Teorica delle Funzioni (di variabili complesse) esposta dal Dott. Felice Casorati, prof. di calcolo differenziale et integrale nella R. Università di Pavia; volume primo, Pavia, tipografia dei fratelli Fusi, 1868. — Dott. *Carlo-Maria Piuma.*

Fisica del globo (Spazi, Climi e Meteore), corso completo di Geografia et di Meteorologia, del professore Gerolamo Boccardo (Genova), coi tipi del R. i dei Sordo Muti. 1868. — Dott. *Giuseppe Serva Carpi.*

JUIN. — Intorno ad una formula del Leibniz. Nota del prof. *Placido Tardy.*

Di un supposto sistema telegrafico magnetico indicato da alcuni autori dei secoli XVI et XVII. Lettera del P. *D. Timoteo Bertelli Barnabita* à *D.-B. Boncompagni.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

JUILLET. — De l'École de Bagdad et des travaux scientifiques des Arabes. Lettre de M. *L.-Am. Sédillot* à *D.-B. Boncompagni.*

Introduction à l'Art analytique, par François Viète. Traduit par M. *F. Ritter.*

AOUT. — Première série de Notes sur la Logistique spécieuse, par François Viète. Traduit par M. *F. Ritter.*

SEPTEMBRE. — Intorno alla vita e agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi. Nota del Dott. *Angelo Forti.*

Compléments de Géométrie fondés sur la perspective, formant suite à tous les traités de Géométrie élémentaire, par M. *Poudra*, officier supérieur d'état-major, en retraite.

Catalogue des travaux de M. Noel-Germinal Poudra.

OCTOBRE et NOVEMBRE (*voir* le numéro de juin des *Nouvelles Annales*).

DÉCEMBRE. — Sulla epistola di Pietro Peregrino di Maricourt, e sopra alcuni trovati e teorie magnetiche del secolo XIII. Memoria seconda del P. *D. Timoteo Bertelli Barnabita.* (Fine.)

Annunzi di recenti pubblicazioni.

TOME II (1869).

JANVIER. — La vie et les travaux du Baron Cauchy, Membre de l'Académie des Sciences, par C.-A. Valson, professeur à la

Faculté des Sciences de Grenoble, avec une Préface de M. Hermite, Membre de l'Académie des Sciences, etc. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École impériale Polytechnique, quai des Augustins, 55. *D.-B. Boncompagni.*

FÉVRIER. — La vie et les travaux du Baron Cauchy, etc. *D.-B. Boncompagni.* (Suite et fin.)

MARS. — Intorno alla vita e agli scritti di Francesco Woepcke. Nota di *Enrico Narducci.*

Ces différents cahiers renferment de précieux documents historiques. Nous n'hésitons pas à dire qu'une semblable publication est un nouveau service rendu à la science par le Prince *Boncompagni.* (G.)

ERRATA.

Page 407, ligne 3 en remontant, *au lieu de* va paraître, *lisez* a paru au commencement de 1868.

» 407 » 2 en remontant, *au lieu de* $E\left(\frac{n}{q}\right)^2$, *lisez* $E\left(\frac{n}{q}\right)$.

» 408 » 6, *au lieu de* $N_{n-1-(a-1)r,q-1}$, *lisez* $N_{n-1-(a-1)q,q-1}$.

» 409 » ligne dernière, *au lieu de* $\frac{N^3-1}{12}$, *lisez* $\frac{N^2-1}{12}$.

QUESTIONS.

957. On décrit sur une droite AB, comme diamètre, une demi-circonférence AMB, et de l'autre côté de la droite AB un rectangle ABB'A', ayant pour base AB, et pour hauteur une droite BB' égale au côté du carré inscrit dans le cercle dont AB est le diamètre; puis d'un point M

pris arbitrairement sur la demi-circonférence AMB, on mène aux deux sommets A′, B′ du rectangle les droites MA′, MB′, qui coupent le diamètre AB en des points C, D. Démontrer que $AD^2 + BC^2 = \overline{AB}^2$. (EULER.)

958. Faire passer par un point une circonférence qui coupe sous des angles donnés deux circonférences données.

Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence cherchée.

Nombre des solutions du problème.

959. Une ellipse de grandeur constante se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe HAD en un point déterminé A. Dans chacune de ses positions, on lui circonscrit un rectangle HDCF ayant sa base sur HAD. Trouver le lieu géométrique :

1° Des foyers;

2° Du centre;

3° Des sommets C, F du rectangle circonscrit;

4° Des points de contact E, B, G de ses côtés avec l'ellipse;

5° La courbe enveloppe du grand axe.

(BROCARD.)

960. On a deux surfaces homofocales du second degré A et B; en deux points M et M′ de la première on mène les normales qui rencontrent la seconde en quatre points. Démontrer que le plan mené par le milieu de la corde MM′, et perpendiculairement à cette corde, passe par le milieu de l'une des cordes qui joignent les points d'intersection des normales avec la seconde surface. (LAGUERRE.)

PROPRIÉTÉS NOUVELLES DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE;

PAR GEORGES DOSTOR,
Docteur ès Sciences.

---

1. Considérons les équations

(1) $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ | $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$

de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leur centre O et à leurs axes; et soient F, F' leurs foyers. Appelons x, y les coordonnées d'un point M de ces courbes; ρ le rayon central OM qui aboutit au point M; r, r' les rayons vecteurs menés des deux foyers au même point; et 2φ l'angle compris entre ces rayons vecteurs. Désignons, en outre, par $2c$ la distance focale FF', de sorte que

$c^2 = a^2 - b^2$. | $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Dans le triangle MFF', la droite MO est la médiane sur le côté FF'; par conséquent, nous avons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} 4\rho^2 &= r^2 + r'^2 + 2rr'\cos 2\varphi,\\ 4c^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos 2\varphi,\end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant $\cos 2\varphi$ par $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ et en multipliant $r^2 + r'^2$ par $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$,

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} 4\rho^2 &= (r' + r)^2\cos^2\varphi + (r' - r)^2\sin^2\varphi,\\ 4c^2 &= (r' - r)^2\cos^2\varphi + (r' + r)^2\sin^2\varphi,\end{aligned}\right.$$

puis, en observant que

$r' + r = 2a$, | $r' - r = 2a$,

(II)

$\left\{\begin{aligned} 4\rho^2 &= 4a^2\cos^2\varphi + (r' - r)^2\sin^2\varphi,\\ 4c^2 &= 4a^2\sin^2\varphi + (r' - r)^2\cos^2\varphi.\end{aligned}\right.$ | $\begin{aligned} 4\rho^2 &= 4a^2\sin^2\varphi + (r' + r)^2\cos^2\varphi,\\ 4c^2 &= 4a^2\cos^2\varphi + (r' + r)^2\sin^2\varphi.\end{aligned}$

3. On peut donner une autre forme à ces relations. Dans la première des égalités (2), remplaçons $\cos 2\varphi$ d'abord par $1 - 2\sin^2\varphi$, puis par $2\cos^2\varphi - 1$; et, dans la seconde, $\cos 2\varphi$ d'abord par $2\cos^2\varphi - 1$, puis par $1 - 2\sin^2\varphi$: nous obtenons

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \rho^2 = a^2 - rr'\sin^2\varphi, \\ c^2 = a^2 - rr'\cos^2\varphi. \end{cases}$$

$$\rho^2 = a^2 + rr'\cos^2\varphi, \qquad c^2 = a^2 + rr'\sin^2\varphi.$$

4. Ajoutons ces équations, de part et d'autre, membre à membre, nous trouvons

$$\rho^2 + c^2 = 2a^2 - rr'; \qquad\qquad \rho^2 + c^2 = 2a^2 + rr';$$

en observant que

$$a^2 - c^2 = b^2, \qquad\qquad a^2 - c^2 = -b^2,$$

on voit que ces relations reviennent à

$$\text{(IV)} \quad \rho^2 = a^2 + b^2 - rr'. \qquad\qquad \rho^2 = a^2 - b^2 + rr'.$$

Théorème I. — *Dans toute ellipse, le carré d'un rayon central est égal à* la somme *des carrés des demi-axes,* diminuée *du produit des rayons vecteurs qui aboutissent à son extrémité.*

Théorème I. — *Dans toute hyperbole, le carré d'un rayon central est égal à* la différence *des carrés des demi-axes,* augmentée *du produit des rayons vecteurs qui aboutissent à son extrémité.*

5. Les secondes des égalités (III) donnent

(V)

$$\begin{cases} \cos\varphi = \sqrt{\dfrac{a^2 - c^2}{rr'}} = \dfrac{b}{\sqrt{rr'}}, \\ \sin\varphi = \sqrt{\dfrac{rr' - b^2}{rr'}} = \sqrt{\dfrac{a^2 - \rho^2}{rr'}}, \\ \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\sqrt{rr' - b^2}}{b} = \dfrac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{b}, \end{cases}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{rr'}} = \frac{b}{\sqrt{rr'}},$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{rr' - b^2}{rr'}} = \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{rr'}},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{\sqrt{rr' - b^2}} = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 - a^2}},$$

pour le demi-angle des rayons vecteurs en valeurs de ces rayons, des demi-axes et du rayon central.

6. L'inclinaison F du rayon vecteur FM est le supplément de l'angle en F du triangle MFF'; par conséquent, si nous faisons $r + r' + 2c = 2p$, nous aurons

$$\tang \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{p(p-r')}{(p-2c)(p-r)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} F' = \sqrt{\frac{(p-2c)(p-r')}{p(p-r)}};$$

d'où nous tirons

$$(3) \qquad \frac{\tang \frac{1}{2} F}{\tang \frac{1}{2} F'} = \frac{p}{p-2c}, \qquad \tang \frac{1}{2} F \tang \frac{1}{2} F' = \frac{p-r'}{p-r}.$$

Suivant que la conique est une ellipse ou une hyperbole, on a

$$r' + r = 2a,$$

$$\frac{p}{p-2c} = \frac{r'+r+2c}{r'+r-2c} = \frac{a+c}{a-c},$$

$$(\text{VI}) \qquad \frac{\tang \frac{1}{2} F}{\tang \frac{1}{2} F'} = \frac{a+c}{a-c}.$$

Théorème II. — *Dans toute ellipse,* le quotient *des tangentes des demi-angles que font avec le grand axe les rayons vecteurs d'un point de la courbe est égal au rapport de* la somme *du grand axe et de la distance focale à* leur différence.

$$r' - r = 2a,$$

$$\frac{p-r'}{p-r} = \frac{2c+r-r'}{2c+r'-r} = \frac{c-a}{c+a},$$

$$\tang \frac{1}{2} F \tang \frac{1}{2} F' = \frac{c-a}{c+a}.$$

Théorème II. — *Dans toute hyperbole,* le produit *des tangentes des demi-angles que font avec l'axe transverse les rayons vecteurs d'un point de la courbe est égal au rapport de* la différence *de la distance focale et de l'axe transverse à* leur somme.

7. Admettons que le point M soit situé dans l'angle

des x et y positifs; nous avons

$$x^2 + y^2 = \rho^2;$$

si nous combinons cette équation successivement avec chacune des équations (1) de nos coniques à centre, nous trouvons, en ayant égard aux relations (IV),

(VII)

$$\begin{cases} x = \frac{a}{c}\sqrt{\rho^2 - b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{a^2 - rr'}, \\ y = \frac{b}{c}\sqrt{a^2 - \rho^2} = \frac{b}{c}\sqrt{rr' - b^2}. \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{a}{c}\sqrt{\rho^2 + b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{a^2 + rr'}. \\ y &= \frac{b}{c}\sqrt{\rho^2 - a^2} = \frac{b}{c}\sqrt{rr' - b^2}. \end{aligned}$$

Telles sont les coordonnées du point M de l'ellipse et de l'hyperbole en valeur des demi-axes, de la demi-distance focale et du rayon central ou des rayons vecteurs.

Si le point M de la courbe était situé dans l'un des trois autres angles des axes, on prendrait chaque radical avec le signe convenable, + ou —.

8. Représentons par $2\rho_1$ le diamètre conjugué de 2ρ dans l'ellipse, ou le diamètre qui, dans l'hyperbole conjuguée

(4) $$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$$

de l'hyperbole (1), correspond au diamètre 2ρ dans cette dernière. Soient x_1, y_1 les coordonnées de l'extrémité supérieure M_1 du diamètre $2\rho_1$; r_1, r'_1 les rayons vecteurs qui aboutissent en M_1, et $2\varphi_1$ l'angle compris entre ces rayons. Nous avons ainsi

(VIII) $$\begin{cases} \rho_1^2 = a^2 - r_1 r'_1 \sin^2\varphi_1, \\ c^2 = a^2 - r_1 r'_1 \cos^2\varphi_1; \end{cases} \qquad \begin{aligned} \rho_1^2 &= b^2 - r_1 r'_1 \cos^2\varphi, \\ c^2 &= b^2 + r_1 r'_1 \sin^2\varphi; \end{aligned}$$

(IX) $$\rho_1^2 = a^2 + b^2 - r_1 r'_1; \qquad \rho_1^2 = b^2 - a^2 + r_1 r'_1;$$

(X)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a}{c}\sqrt{\rho_1^2 - b^2} = -\frac{a}{c}\sqrt{a^2 - r_1 r'_1}, \\ y_1 = \frac{b}{c}\sqrt{a^2 - \rho_1^2} = \frac{b}{c}\sqrt{r_1 r'_1 - b^2}; \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{c}\sqrt{\rho_1^2 - b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{r_1 r'_1 + a^2}, \\ y_1 &= \frac{b}{c}\sqrt{\rho_1^2 + a^2} = \frac{b}{c}\sqrt{r_1 r'_1 + b^2}. \end{aligned}$$

9. On sait que

$$(5)\qquad \rho^2 + \rho_1^2 = a^2 + b^2, \qquad\qquad \rho^2 - \rho_1^2 = a^2 - b^2,$$

d'où l'on tire

$$\rho^2 = a^2 + b^2 - \rho_1^2; \qquad\qquad \rho^2 = a^2 - b^2 + \rho_1^2;$$

comparant ces expressions aux valeurs (IV), on obtient pour l'ellipse et pour l'hyperbole

$$(\mathrm{XI})\qquad \rho_1^2 = rr'_1, \quad \text{et de même} \quad \rho^2 = r_1 r'_1.$$

Théorème III. — *Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, tout demi-diamètre est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs qui aboutissent à l'extrémité de son conjugué.*

Pour l'hyperbole, les deux rayons vecteurs r_1, r'_1 partent toujours des foyers de la conjuguée et aboutissent à l'extrémité du diamètre $2\rho_1$ dans cette dernière.

10. Si nous ajoutons, puis retranchons, les égalités (XI) et que nous comparions les résultats aux relations (5), nous obtiendrons

$$(\mathrm{XII})\qquad a^2 + b^2 = rr' + r_1 r'_1. \qquad\qquad a^2 - b^2 = r_1 r'_1 - rr'.$$

Théorème IV. — La somme *des carrés des deux demi-axes d'une ellipse est égale à* la somme *des produits des rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de deux diamètres conjugués quelconques.*

Théorème IV. — La différence *des carrés des deux demi-axes d'une hyperbole est égale à* la différence *des produits des rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de deux diamètres conjugués quelconques.*

11. Ces dernières relations nous donnent

$$4a^2 - 4rr' + 4a^2 - 4r_1 r'_1 = 4a^2 - 4b^2;$$

$$4a^2 + 4rr' = 4b^2 + 4r_1 r'_1;$$

or

$$4a^2 - 4rr' = (r'+r)^2 - 4rr' = (r'-r)^2;$$
$$4a^2 - 4r_1r_1' = (r_1+r_1')^2 - 4r_1r_1' = (r_1-r_1')^2;$$

$$4a^2 + 4rr' = (r'-r)^2 + 4rr' = (r'+r)^2,$$
$$4b^2 + 4r_1r_1' = (r_1'-r_1)^2 + 4r_1r_1' = (r_1'-r_1)^2;$$

donc il vient

$$\text{(XIII)} \quad (r'-r)^2 + (r_1-r_1')^2 = 4c^2. \qquad\qquad r + r' = r_1 + r_1'.$$

Théorème V. — *Dans l'ellipse, la somme des carrés des différences des rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres conjugués est constante et égale au carré de la distance focale.*

Théorème V. — *Dans deux hyperboles conjuguées, les sommes des rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres conjugués sont égales entre elles.*

12. Les valeurs (XI) changent les expressions des coordonnées (X) dans les suivantes :

(6)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a}{c}\sqrt{rr'-b^2} = -\frac{a}{c}\sqrt{a^2-\rho_1^2}, \\ y_1 = \frac{b}{c}\sqrt{a^2-rr'} = \frac{b}{c}\sqrt{\rho_1^2-b^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{c}\sqrt{rr'-b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{\rho_1^2-a^2}, \\ y_1 = \frac{b}{c}\sqrt{rr'+a^2} = \frac{b}{c}\sqrt{\rho_1^2+b^2}. \end{cases}$$

Comparons les expressions de ces coordonnées aux valeurs (VII) des coordonnées du point M; nous en déduisons de suite

$$\text{(XIV)} \begin{cases} \frac{cx}{a} = \frac{cy_1}{b} = \sqrt{\rho_1^2-b^2}, \\ \frac{cy}{b} = \frac{cx_1}{a} = \sqrt{a^2-\rho_1^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{cx}{a} = \frac{cy_1}{b} = \sqrt{\rho_1^2+b^2}, \\ \frac{cy}{b} = \frac{cx_1}{a} = \sqrt{\rho_1^2-a^2}; \end{cases}$$

d'où nous tirons les relations

$$(\text{XV})\quad \begin{cases} xy + x_1y_1 = 0, \\ a^2yy_1 + b^2xx_1 = 0, \\ xy_1 - yx_1 = ab, \end{cases} \qquad \begin{aligned} xy - x_1y_1 &= 0, \\ a^2yy_1 - b^2xx_1 &= 0, \\ xy_1 - yx_1 &= ab, \end{aligned}$$

dont l'interprétation géométrique est facile.

13. Les égalités (XIV) nous donnent encore, en élevant au carré, en ajoutant d'une part en croix, et en retranchant en croix d'autre part,

$$\frac{c^2x^2}{a^2} + \frac{c^2x_1^2}{a^2} = c^2, \qquad \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{c^2x_1^2}{a^2} = c^2,$$

$$\frac{c^2y^2}{b^2} + \frac{c^2y_1^2}{b^2} = c^2, \qquad \frac{c^2y_1^2}{b^2} - \frac{c^2y^2}{b^2} = c^2,$$

ou bien

$$(\text{XV})\quad \begin{cases} x^2 + x_1^2 = a^2, \\ y^2 + y_1^2 = b^2, \end{cases} \qquad \begin{aligned} x^2 - x_1^2 &= a^2, \\ y^2 - y_1^2 &= b^2. \end{aligned}$$

THÉORÈME VI. — *Dans l'ellipse : 1° la somme des carrés des abscisses de deux points conjugués est constante et égale au carré du demi-grand axe ; 2° la somme des carrés des ordonnées des mêmes points est aussi constante et égale au carré du demi-petit axe.*

THÉORÈME VI. — *Dans deux hyperboles conjuguées : 1° la somme des carrés des abscisses de deux points conjugués est constante et égale au carré du demi-axe transverse de la première hyperbole ; 2° la somme des carrés des ordonnées des mêmes points est aussi constante et égale au carré du demi-axe transverse de l'autre hyperbole.*

14. Nous avons, de même qu'au n° 5,

$$(\text{XVII})\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{b}{\sqrt{r_1 r'_1}} = \dfrac{b}{\rho}, \\[2ex] \sin\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho}, \\[2ex] \tang\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{b}; \end{cases} \qquad \begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \frac{a}{\rho}, \\[1ex] \cos\varphi_1 &= \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho}, \\[1ex] \tang\varphi_1 &= \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}; \end{aligned}$$

et, comme nous avons déjà vu au n° 5 que

$$(\text{XVIII})\quad \left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{b}{\rho_1}, \\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho_1}, \\ \tang\varphi &= \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{b}, \end{aligned}\right. \qquad \left| \qquad \begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{b}{\rho_1}, \\ \cos\varphi &= \frac{\sqrt{\rho^2-a^2}}{\rho_1}, \\ \tang\varphi &= \frac{b}{\sqrt{\rho^2-a^2}}, \end{aligned}\right.$$

nous trouvons, pour l'ellipse et l'hyperbole, la relation

$$(\text{XIX})\qquad \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{2\rho}{2\rho_1}.$$

Théorème VII. — *Dans l'ellipse, ainsi que dans deux hyperboles conjuguées, deux diamètres conjugués sont entre eux comme les cosinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés à leurs extrémités.*

15. Nous obtenons ensuite

$$(\text{XX})\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_1^2\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi_1 = c^2, \\ &\tang^2\varphi + \tang^2\varphi_1 = \frac{c^2}{b^2}. \end{aligned}\right. \qquad \left| \qquad \begin{aligned} &\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{2\rho}{2\rho_1} : \frac{2a}{2b}, \\ &\frac{\tang\varphi}{\tang\varphi_1} = \frac{2b}{2a}. \end{aligned}\right.$$

Théorème VIII. — *Dans l'ellipse, la somme des carrés des tangentes des demi-angles que font entre eux les rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres conjugués est constante, et égale le rapport du carré de la distance focale au carré du petit axe.*

Théorème IX. — *Dans deux hyperboles conjuguées, le rapport de deux diamètres conjugués, divisé par le rapport des axes transverses, est égal au rapport des sinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés aux extrémités de ces diamètres.*

Théorème X. — *Dans deux hyperboles conjuguées,*

les deux axes transverses sont réciproquement proportionnels aux tangentes des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs de deux points conjugués.

16. Appelons V l'angle aigu compris entre les diamètres conjugués 2ρ, $2\rho_1$. On sait que

$$(7)\qquad \rho\rho_1 \sin V = ab;$$

or les formules (XVI) et (XVII) donnent

$$(8)\qquad b^2 = \rho\rho_1 \cos\varphi \cos\varphi_1; \qquad\Big|\qquad ab = \rho\rho_1 \sin\varphi \sin\varphi_1;$$

substituant les valeurs (8) dans (7), on trouve

$$(\text{XXI})\qquad \sin V = \frac{a}{b}\cos\varphi\cos\varphi_1. \qquad\Big|\qquad \sin V = \sin\varphi \sin\varphi_1.$$

Théorème XI. — *Dans toute ellipse, le sinus de l'angle compris entre deux diamètres conjugués est égal au rapport des axes multiplié par le produit des cosinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés aux extrémités de ces diamètres.*

Théorème XI. — *Dans deux hyperboles conjuguées, le sinus de l'angle compris entre deux diamètres conjugués est égal au produit des sinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés aux extrémités de ces diamètres.*

17. Nous obtenons ensuite, par l'égalité (7),

$$\cos V = \frac{\sqrt{\rho^2\rho_1^2 - a^2b^2}}{\rho\rho_1},$$

ou, en remplaçant ρ_1^2 par ses valeurs tirées des relations (5),

$$\cos V = \frac{\sqrt{\rho^2(a^2+b^2-\rho^2) - a^2b^2}}{\rho\rho_1} = \frac{\sqrt{(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)}}{\rho\rho_1}; \qquad\Big|\qquad \cos V = \frac{\sqrt{\rho^2(\rho^2-a^2+b^2) - a^2b^2}}{\rho\rho_1} = \frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2+b^2)}}{\rho\rho_1};$$

d'où il nous vient, en ayant égard aux formules (XVII)

et (XVIII),

(XXII) $\cos V = \sin\varphi \sin\varphi_1$.	$\cos V = \dfrac{\sqrt{\rho^2 + b^2}}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} \cos\varphi \cos\varphi_1$.

THÉORÈME XII. — *Dans toute ellipse, le cosinus de l'angle aigu compris entre deux diamètres conjugués est égal au produit des sinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés aux extrémités de ces diamètres.*

18. Si nous divisons (XXI) par (XXII), nous aurons

(XXIII) $\operatorname{tang} V \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1 = \dfrac{a}{b}$.	$\operatorname{tang} V = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1$.

THÉORÈME XIII. — *Dans toute ellipse, si l'on multiplie entre elles les tangentes des trois angles que forment entre eux d'abord deux diamètres conjugués, puis les rayons vecteurs de leurs extrémités avec les normales correspondantes, on obtient un produit constant et égal au rapport des axes.*

19. Les abscisses d'un point de l'ellipse et de l'hyperbole peuvent aussi s'exprimer en valeur des rayons vecteurs qui y aboutissent, et les ordonnées en valeur de l'angle compris entre ces rayons vecteurs.

1° En effet, on a

$$a^2 - rr' = \frac{4a^2 - 4rr'}{4} = \frac{(r' + r)^2 - 4rr'}{4} = \frac{(r' - r)^2}{4},$$

$$a^2 + rr' = \frac{4a^2 + 4rr'}{4} = \frac{(r' - r)^2 + 4rr'}{4} = \frac{(r' + r)^2}{4};$$

$$a^2 - r_1 r'_1 = \frac{4a^2 - 4r_1 r'_1}{4} = \frac{(r_1 + r'_1)^2 - 4r_1 r'_1}{4} = \frac{(r_1 - r'_1)^2}{4};$$

$$r_1 r'_1 - a^2 = \frac{4r_1 r'_1 + 4b^2}{4} - c^2 = \frac{(r_1 + r'_1)^2}{4} - c^2,$$

substituant dans les valeurs (III) et (X), on trouve

(XXIV)

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a(r'-r)}{2c} = \frac{r'^2-r^2}{4c}, \\ -x_1 &= \frac{a(r_1-r'_1)}{2c} = \frac{r_1^2-r'^2_1}{4c}, \end{aligned}\right. \qquad \left|\quad \begin{aligned} x &= \frac{a(r'+r)}{2c} = \frac{r'^2-r^2}{4c}, \\ x_1 &= \frac{2c}{a}\sqrt{(r_1+r'_1)^2-4c^2}\ (^*); \end{aligned}\right.$$

2° Les formules (V) et (XVII) donnent

$$\begin{aligned} rr'-b^2 &= b^2\operatorname{tang}^2\varphi, \\ \rho_1^2-b^2 &= b^2\operatorname{tang}^2\varphi_1; \end{aligned} \qquad \left|\quad \begin{aligned} rr'-b^2 &= b^2\cot^2\varphi, \\ \rho_1^2+b^2 &= c^2+\rho_1^2-a^2 = c^2+a^2\cot^2\varphi_1; \end{aligned}\right.$$

mettant ces valeurs dans les expressions (VII) et (6), on obtient

$$(\mathrm{XXV})\quad \left\{\begin{aligned} y &= \frac{b^2}{c}\operatorname{tang}\varphi, \\ y_1 &= \frac{b^2}{c}\operatorname{tang}\varphi_1; \end{aligned}\right. \qquad \left|\quad \begin{aligned} y &= \frac{b^2}{c}\cot\varphi, \\ y_1 &= \frac{b}{c}\sqrt{c^2-a^2\cot^2\varphi_1}\ (^*). \end{aligned}\right.$$

20. Supposons que les deux *diamètres conjugués* de l'ellipse soient *égaux*; dans ce cas $\rho = \rho'$, et, d'après (XI),

$$(\mathrm{XXVI})\qquad rr' = r_1 r'_1 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Théorème XIV. — *Dans l'ellipse, le produit des rayons vecteurs qui aboutissent à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux est constant et égal à la demi-somme des carrés des demi-axes.*

21. Puisque $r + r' = r_1 + r'_1 = 2a$, on a, en vertu de (XXVI)

$$(r+r')^2 - 4rr' = (r_1+r'_1)^2 - 4r_1 r'_1$$

(*) On trouve

$$x_1 = \frac{a^2}{c}\cot\varphi_1, \qquad y_1 = \frac{b(r_1^2 - r'^2_1)}{4c}.$$

ou

$$(r' - r)^2 = (r_1 - r'_1)^2,$$

ce qui change la relation (XIII) dans la suivante

(XXVII) $$r' - r = r_1 - r'_1 = c\sqrt{2}.$$

Théorème XV. — *Dans l'ellipse, le différence des rayons vecteurs qui aboutissent à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux est égale au côté du carré inscrit dans le cercle qui a la distance focale pour diamètre.*

22. On trouve, pour ces rayons vecteurs, les valeurs,

(XXVIII) $$r' = a + \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad r = a - \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

23. Si *l'hyperbole est équilatère*, c'est-à-dire si $a = b$, il viendra $c = a\sqrt{2}$, $\rho^2 = rr'$, $\sin\varphi = \frac{a}{\rho}$, puis

(XXIX) $$\begin{cases} x = y_1 = \dfrac{a}{c}\sqrt{rr' + a^2} = \dfrac{a}{c}\sqrt{\rho^2 + a^2}, \\ y = x_1 = \dfrac{a}{c}\sqrt{rr' - a^2} = \dfrac{a}{c}\sqrt{\rho^2 - a^2}. \end{cases}$$

Théorème XVI. — *Dans l'hyperbole équilatère, tout rayon central est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs qui y aboutissent.*

HOMOGRAPHIE ET PERSPECTIVE;

Par M. HOUSEL.

1. Nous nous proposons de démontrer par le calcul que, dans un plan et dans l'espace, deux figures homographiques sont deux figures perspectives dont on a

changé la position sans altérer la forme. Pour cela, nous passerons par l'intermédiaire de l'homologie.

Quand il ne s'agit que de géométrie plane, on sait que deux figures homologiques reviennent à deux figures perspectives; ainsi nous avons seulement à comparer l'homographie à l'homologie.

Deux figures homographiques étant définies analytiquement par les relations connues

$$x = \frac{ax' + by' + c}{\alpha x' + \beta y' + 1}, \quad y = \frac{a'x' + b'y' + c'}{\alpha x' + \beta y' + 1},$$

il faut faire voir que l'on peut toujours, en déplaçant ces figures sans les déformer, les disposer de manière qu'elles soient homologiques, et trouver les éléments de l'homologie.

II. Pour cela, nous transporterons la première figure (x', y') parallèlement à elle-même, c'est-à-dire sans rotation, ce qui donne

$$x' = x_1 + A, \quad y' = y_1 + B.$$

Au contraire, nous ferons tourner l'autre, sans translation, d'un angle ω autour de l'origine. Comme les axes sont rectangulaires, on trouve

$$x = \xi \cos\omega - \eta \sin\omega = \frac{ax_1 + by_1 + aA + bB + c}{\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha A + \beta B + 1},$$

$$y = \xi \sin\omega + \eta \cos\omega = \frac{a'x_1 + b'y_1 + a'A + b'B + c'}{\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha A + \beta B + 1},$$

et l'on demande d'établir l'homologie entre les figures représentées par les coordonnées x_1 et y_1, ξ et η.

On posera donc

$$\frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{1}{lx_1 + my_1 + n},$$

ce qui donne, en prenant les expressions de ξ et de $\varkappa$,

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} x_1[\cos\omega(lx_0+1) - ly_0\sin\omega] \\ \quad + y_1[mx_0\cos\omega - \sin\omega(my_0+1)] \\ \quad + (n-1)(x_0\cos\omega - y_0\sin\omega) \end{array}\right\}}{lx_1 + my_1 + n} = \frac{ax_1 + by_1 + aA + bB + c}{\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha A + \beta B + 1}.$$

Pour identifier ces expressions, qui doivent donner un résultat du premier degré, il faut que les dénominateurs ne diffèrent que par un facteur constant. Donc

$$\frac{l}{\alpha} = \frac{m}{\beta} = \frac{n}{\alpha A + \beta B + 1}.$$

Soit R la valeur commune de ces rapports, on a

$$l = \alpha R, \quad m = \beta R, \quad n = R(\alpha A + \beta B + 1).$$

Alors, en identifiant de part et d'autre le coefficient de x_1, celui de y_1 et le terme indépendant, puis posant, pour abréger, $M = x_0\cos\omega - y_0\sin\omega$, on a

(1) $$Ra = \alpha RM + \cos\omega,$$

(2) $$Rb = \beta RM - \sin\omega,$$

et

$$R(aA + bB + c) = (n-1)M.$$

Mais ici il faut remplacer n par sa valeur

$$n = R(\alpha A + \beta B + 1),$$

ce qui donne

$$R(aA + bB + c) = M(R\alpha A + R\beta B + R - 1).$$

Or, comme

$$M\alpha A = Ra - \cos\omega, \quad M\beta B = Rb + \sin\omega,$$

on a

$$R(aA + bB + c) = A(Ra - \cos\omega) + B(Rb + \sin\omega) + M(R - 1),$$

ou bien

$$(3) \qquad Rc = B\sin\omega - A\cos\omega + M(R - 1).$$

La seconde égalité donnera les conditions

$$(4) \qquad Ra' = \alpha RN + \sin\omega,$$

$$(5) \qquad Rb' = \beta RN + \cos\omega,$$

et

$$(6) \qquad Rc' + B\cos\omega + A\sin\omega = N(R - 1),$$

en posant $N = x_0 \sin\omega + y_0 \cos\omega$.

En effet, en passant de la première égalité à la seconde, on observe qu'il faut changer $\cos\omega$ en $\sin\omega$, et $\sin\omega$ en $-\cos\omega$; du reste $R = \dfrac{n}{\alpha A + \beta B + 1}$ est le même de part et d'autre.

III. Entre (1) et (2), éliminons M, il vient

$$R(a\beta - b\alpha) = \alpha\sin\omega + \beta\cos\omega;$$

entre (3) et (4), éliminons N, on a

$$R(\alpha b' - a'\beta) = \alpha\cos\omega - \beta\sin\omega.$$

En divisant, on trouve

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\beta^2 a' - \alpha^2 b + \alpha\beta(a - b')}{\alpha^2 b' + \beta^2 a - \alpha\beta(a' + b)}.$$

Pour avoir R sans erreur de signe, observons que les deux équations entre lesquelles nous l'avons éliminé par

division peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{R}{\cos\omega}(\alpha b' - a'\beta) = \alpha - \beta \operatorname{tang}\omega,$$

$$\frac{R}{\cos\omega}(a\beta - b\alpha) = \alpha \operatorname{tang}\omega + \beta.$$

Multiplions la première égalité par α, la seconde par β et ajoutons, il vient

$$\frac{R}{\cos\omega}\left[\alpha^2 b' + \beta^2 a - \alpha\beta(b + a')\right] = \alpha^2 + \beta^2.$$

Comme $\cos\omega$ est toujours positif, quel que soit le sens où l'on tourne, on a ainsi le signe de R. Du reste, comme la valeur absolue de $\cos\omega$ est $\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\omega}$, on a aussi la valeur cherchée de R.

Connaissant R et ω, l'une des équations (1) et (2) donnera M; on aura de même N. Donc, connaissant M, N et ω, on aura x_0 et y_0.

Enfin, les équations (3) et (6) ne contenant plus de quantités inconnues que A et B, on les obtient aussi par des équations du premier degré.

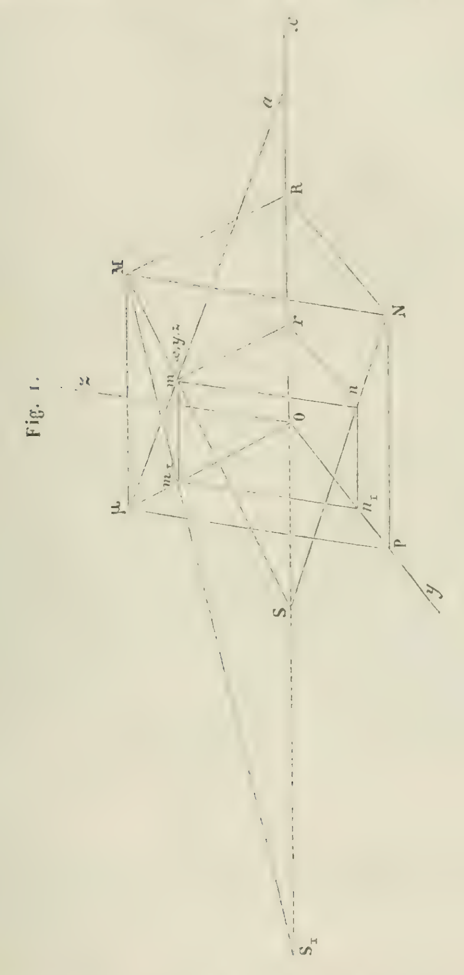
IV. Passons maintenant aux trois dimensions; pour cela, nous commencerons par rappeler la liaison entre *l'homologie et la perspective dans l'espace.*

Les formules de l'homologie étant, comme on le sait,

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = \frac{z - z_0}{z' - z_0} = \frac{1}{lx' + my' + nz' + p},$$

les équations des figures en x', y', z' et x, y, z seront de même degré : alors une droite et un plan de la première figure correspondent à une droite et à un plan de la seconde figure; de plus, *deux points correspondants se trouvent sur une droite qui passe au centre d'homo-*

logie; enfin les rapports anharmoniques sont les mêmes de part et d'autre.



Imaginons deux droites SaA, SmM passant au centre d'homologie S et par deux couples de points correspondants a et A, m et M. Le plan MSA de ces droites con-

tiendra les lignes AM, am, qui, par conséquent, se couperont en un point μ; de plus, ce point, se trouvant sur deux lignes homologues, appartiendra aux deux figures et sera, par conséquent, sur le plan d'homologie représenté par $lx + my + nz + p = 1$.

V. Pour simplifier la construction (*fig.* 1), admettons que, dans le couple fixe (a, A), celui des points A qui appartient à la figure donnée est à l'infini : alors a sera sur la direction arbitraire, mais fixe, Sa, le correspondant de l'infini. Cela posé, soit, dans cette figure donnée, le point M (x', y', z') dont on cherche le correspondant m (x, y, z); il est clair que $M\mu$, devant passer en A, sera ici parallèle à Sa. Ainsi, soit μ le point où la parallèle menée de M à Sa perce le plan d'homologie, il suffira de joindre $a\mu$ qui coupe SM au point cherché m.

VI. Pour voir que cette construction revient à la perspective dans l'espace, menons, dans le plan $O\mu a$, la parallèle mm_1 à Ox jusqu'à la rencontre de $O\mu$ en m_1; cette parallèle sera donc comprise dans le plan MSS_1, S_1 étant le point où Mm_1 coupe Ox, et nous allons calculer la position du point S_1.

Les triangles $O\mu a$, $m_1\mu m$ donnent

$$\frac{Oa}{mm_1} = \frac{\mu a}{\mu m};$$

ensuite les triangles Sma, $\mu M m$ donnent

$$\frac{ma}{\mu m} = \frac{mS}{Mm};$$

donc

$$\frac{\mu a}{\mu m} = 1 + \frac{ma}{\mu m} = 1 + \frac{mS}{Mm} = \frac{MS}{Mm} = \frac{SS_1}{mm_1},$$

d'où l'on tire

$$SS_1 = Oa,$$

et la position du point S_1 est fixe.

Ainsi le point m_1 sera la perspective ordinaire du point donné M sur le plan d'homologie pris comme tableau, en supposant le point de vue, c'est-à-dire l'œil du spectateur, placé en S_1.

Par conséquent, la *perspective-relief* de la figure M s'obtiendra en traçant sur le plan d'homologie, que l'on appelle alors *plan invariable*, la perspective ordinaire de cette figure; seulement on prendra alors pour point de vue, c'est-à-dire pour position de l'œil, non plus le centre d'homologie S, mais le point S_1, obtenu de la manière suivante.

Sur la direction Sx, soit dans la seconde figure, le point a correspondant de l'infini sur cette même direction dans la première figure, et, sur cette ligne Sa, portez en sens contraire $SS_1 = Oa$.

D'après cela, il ne reste plus à chercher que la distance $m_1 m$ à laquelle il faut creuser la pierre. On prend le plan d'homologie pour celui des yz; alors $m_1 m = x$ et $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ pour S.

Les coordonnées du point M sont connues, et l'on a

$$OP = y'.$$

On vient de trouver le point m_1 qui donne

$$On_1 = y;$$

donc les triangles $\mu m m_1$ et $\mu O a$ donnent

$$\frac{x}{Oa} = \frac{\mu m_1}{\mu O}.$$

Mais, dans les triangles $O\mu P = Om_1 n_1$, on a

$$\frac{\mu m_1}{\mu O} = \frac{Pn_1}{PO};$$

enfin

$$x = \frac{Oa(y' - y)}{y'}.$$

Pour plus de détails sur ce sujet, on peut consulter le *Traité de Perspective* de M. de la Gournerie.

VII. Arrivons à la partie de notre travail pour laquelle nous avons rappelé ce qui précède, et surtout l'identité de l'homologie avec la perspective dans l'espace; voici le théorème qu'il faut démontrer.

En déplaçant, sans déformation, deux figures homographiques dans l'espace, on peut les rendre homologiques.

L'homographie est définie par les formules connues

$$x = \frac{ax' + by' + cz' + d}{Ax' + By' + Cz' + D},$$

$$y = \frac{a'x' + b'y' + c'z' + d'}{Ax' + By' + Cz' + D},$$

$$z = \frac{a''x' + b''y' + c''z' + d''}{Ax' + By' + Cz' + D}.$$

Nous transporterons, sans rotation, l'une des figures (x', y', z') parallèlement à elle-même, et nous poserons

$$x' = x_1 + X, \quad y' = y + Y, \quad z' = z + Z,$$

ces quantités X, Y, Z étant des constantes qu'il faudra déterminer.

Au contraire, nous ferons tourner, sans translation, l'autre figure (x, y, z) d'un angle ω autour d'une droite passant par l'origine, et qui aura pour équations

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

Il faudra donc aussi déterminer ω, ainsi que α, β et γ;

seulement, les coordonnées étant supposées rectangulaires, les trois dernières inconnues ont la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Les coordonnées du point (x, y, z) deviennent ξ, η, ζ, après cette rotation.

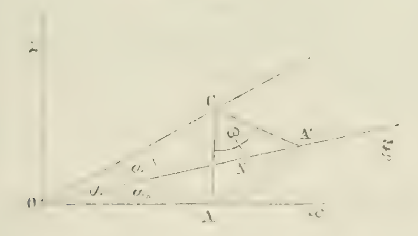
Toutes ces déterminations se feront en indiquant les conditions nécessaires pour que les figures en x_1, y_1, z_1 et ξ, η, ζ soient homologues entre elles.

VIII. Calculons d'abord les formules de rotation (*fig.* 2); observons qu'on a

$$x = l\xi + m\eta + n\zeta,\quad y = l_1\xi + m_1\eta + n_1\zeta,\quad z = l_2\xi + m_2\eta + n_2\zeta,$$

car, l'axe de rotation passant à l'origine, il n'y a pas de termes indépendants, puisque ξ, η, ζ nuls donnent x, y, z nuls, et réciproquement.

Fig. 2.



Pour déterminer les coefficients $l, m, n; l_1, \ldots$, je dis qu'il suffit d'avoir les équations

$$\frac{x}{a_0} = \frac{y}{b_0} = \frac{z}{c_0},\quad \frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1},\quad \frac{x}{a_2} = \frac{y}{b_2} = \frac{z}{c_2}$$

des trois axes Ox, Oy, Oz, après qu'ils auront tourné de l'angle ω pour venir en $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ (il est clair que ces équations sont prises par rapport à Ox, Oy, Oz).

Les équations $\frac{x}{a_0} = \frac{y}{b_0} = \frac{z}{c_0}$ de $O\xi$ sont aussi

$$\eta = 0 \quad \text{et} \quad \zeta = 0,$$

ce qui donne, pour un point de cette droite,

$$x = l\xi, \quad y = l_1\xi, \quad z = l_2\xi,$$

ou bien

$$\xi = \frac{x}{l} = \frac{y}{l_1} = \frac{z}{l_2}.$$

On est donc porté à poser $l = a_0$, $l_1 = b_0$, $l_2 = c_0$, ainsi que $m = a_1$, $m_1 = b_1$, $m_2 = c_1$, et $n = a_2$, $n_1 = b_2$, $n_2 = c_2$.

Cependant, pour que ces relations soient vraies, il faut, à cause de la relation $x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, qui tient à ce que la distance du point à l'origine ne change pas par la rotation, que l'on ait

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

Alors les équations de transformation sont

$$x = a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta, \quad y = b_0\xi + b_1\eta + b_2\zeta, \quad z = c_0\xi + c_1\eta + c_2\zeta.$$

Quant aux coefficients des variables, ils disparaissent, parce que les axes sont rectangulaires; car il est facile de reconnaître, d'après ce qui précède, que ces coefficients ne sont autre chose que les cosinus des angles que $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ font avec Ox, Oy et Oz. Nous reviendrons sur ce sujet.

Ainsi soient α_0, β_0, γ_0 les angles que fait $O\xi$ avec Ox,

Oy, Oz, on a

$$a_0 = \cos\alpha_0, \quad b_0 = \cos\beta_0, \quad c_0 = \cos\gamma_0,$$

et il faut déterminer ces angles (*fig.* 2).

IX. D'abord on a la relation

$$(1) \qquad \cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1;$$

ensuite la droite Ox, tournant autour de OC, fait toujours avec cet axe le même angle $COA = COA' = \alpha$; donc on a

$$(2) \qquad \cos\alpha = \cos\alpha\cos\alpha_0 + \cos\beta\cos\beta_0 + \cos\gamma\cos\gamma_0.$$

D'abord nous déterminerons directement l'angle $x_0\xi = \alpha_0$. D'un point A, pris n'importe où sur Ox, abaissons sur OC un plan perpendiculaire qui coupera les plans COx et $CO\xi$ suivant CA et CA'. Les triangles rectangles COA, COA' sont égaux comme ayant le côté commun CO adjacent à des angles égaux, puisque $COA = COA' = \alpha$; donc $OA' = OA$, $CA' = CA$. Le point A a tourné jusqu'en A' en décrivant dans le plan $xO\xi$ l'angle $AOA' = \alpha_0$, et dans le plan ACA' l'angle $ACA' = \omega$, d'après l'hypothèse.

Or

$$CA = OA\sin\alpha, \quad \text{et} \quad AA' = 2AN = 2CA\sin\tfrac{1}{2}\omega,$$

ou bien

$$AA' = 2OA\sin\alpha\sin\tfrac{1}{2}\omega,$$

puisque $CA' = CA$. Comme $OA' = OA$, on a aussi, dans le triangle AOA',

$$\cos\alpha_0 = \frac{2\overline{OA}^2 - \overline{AA'}^2}{2\overline{OA}^2},$$

ou bien

$$\cos\alpha_0 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\alpha = 1 - 2L^2,$$

en posant, pour abréger,

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega \sin\alpha = L.$$

D'après cela, $1 - \cos\alpha_0 = 2L^2$, $1 + \cos\alpha_0 = 2(1 - L^2)$; de sorte que les équations (1) et (2) deviennent

$$\cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 4L^2(1 - L^2)$$

et

$$\cos\beta\cos\beta_0 + \cos\gamma\cos\gamma_0 = 2L^2\cos\alpha.$$

Dans la seconde relation, prenons la valeur de $\cos\gamma_0$ et transportons-la dans la première en élevant au carré, on a

$$\cos^2\beta_0 + \frac{4L^4\cos^2\alpha - 4L^2\cos\alpha\cos\beta\cos\beta_0 + \cos^2\beta\cos^2\beta_0}{\cos^2\gamma}$$
$$= 4L^2(1 - L^2),$$

ce qui donne, à cause de $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, l'équation

$$\cos^2\beta_0(1 - \cos^2\alpha) - 4L^2\cos\alpha\cos\beta\cos\beta_0$$
$$= 4L^2[\cos^2\gamma(1 - L^2) - L^2\cos^2\alpha.$$

Donc

$$\frac{\cos\beta_0\sin^2\alpha}{2L} = L\cos\alpha\cos\beta$$
$$\pm\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\gamma + L^2[\cos^2\alpha\cos^2\beta + (\cos^2\alpha - 1)(1 - \cos^2\beta)]}.$$

Le radical revient à $\pm\cos\gamma\sqrt{\sin^2\alpha - L^2}$. Mais, ayant égard à $\sin\frac{1}{2}\omega\sin\alpha = L$ et supprimant le facteur commun $\sin\alpha$, on trouvera, à cause de

$$\cos\gamma_0 = \frac{2L^2\cos\alpha - \cos\beta\cos\beta_0}{\cos\gamma},$$

$$\cos\beta_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\alpha\cos\beta \pm \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$

$$\cos\gamma_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\alpha\cos\gamma \mp \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\omega).$$

X. On peut choisir, dans le premier cosinus, le signe

que l'on veut, ce qui indiquera que la rotation aura lieu dans un sens ou dans l'autre; mais il faut toujours prendre les radicaux avec des *signes contraires* dans les deux expressions. En effet, les équations (1) et (2) se vérifient avec des signes contraires et non avec le même signe.

Pour les deux autres axes tournés aussi en $O\eta$ et en $O\zeta$, on opérera de même; seulement il faut que le signe d'un radical choisi, par exemple, dans la valeur de $\cos\beta_0$, détermine, non-seulement celui de $\cos\gamma_0$, mais encore les signes des cosinus analogues relatifs à $O\eta$ et à $O\zeta$.

On arrive à cette détermination au moyen de la relation $x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, qui fait annuler les coefficients de $\xi\eta$, de $\xi\zeta$ et de $\eta\zeta$ quand on élève au carré les relations du n° VIII. Dans ces relations

$$x = a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta,$$
$$y = b_0\xi + b_1\eta + b_2\zeta,$$
$$z = c_0\xi + c_1\eta + c_2\zeta,$$

supposons que l'on ait pris le signe $+$ pour $\cos\beta_0 = b_0$, on a

$$a_0 = \cos\alpha_0 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\alpha,$$
$$b_0 = \cos\beta_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$c_0 = \cos\gamma_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\omega).$$

On aura les signes des autres coefficients par une permutation tournante. Voici comment il faut la diriger.

XI. Avant tout, comme il n'y a pas de radical dans la valeur de $\cos\alpha_0$, coefficient de ξ dans la valeur de x, il n'y en aura pas non plus dans celle de $\cos\beta_1$, coefficient de η dans la valeur de y, ni dans celle de $\cos\gamma_2$, coeffi-

cient de ζ dans la valeur de z; il sera même facile d'écrire ces coefficients par analogie.

Quant aux radicaux des deux autres coefficients d'une même ligne *verticale* dans les relations précédentes, nous avons vu, sur $\cos\beta_0$ et $\cos\gamma_0$, qu'ils étaient de signes différents; il reste à faire voir qu'il en est de même pour une même ligne *horizontale*.

En effet, la vérification d'une formule telle que

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_0 + \cos\beta_1 \cos\beta_0 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_0 = 0$$

pourra se faire avec cette supposition, tandis qu'elle serait impossible en prenant, par exemple, c_0 et c_1 avec des radicaux de même signe.

En calculant cette vérification, il est bon d'observer que l'identité écrite ci-dessus se décompose en deux, savoir : les termes qui ont $\sin\frac{1}{2}\omega$ à la simple puissance, et les autres termes; dans chaque partie, la vérification se fait à part, et l'on simplifie le calcul en supprimant les facteurs communs à mesure qu'on les rencontre.

D'après ces règles et d'après les valeurs de b_0 et de c_0, on doit écrire

$$a_1 = \cos\alpha_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$b_1 = \cos\beta_1 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\beta,$$
$$c_1 = \cos\gamma_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\gamma\cos\beta + \cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$

et enfin

$$a_2 = \cos\alpha_2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\gamma\cos\alpha + \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$b_2 = \cos\beta_2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\gamma\cos\beta - \cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$c_2 = \cos\gamma_2 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\gamma.$$

XII. Dans les formules de l'homographie (VII), il faut donc substituer

$$x' = x_1 + X, \ldots \quad \text{et} \quad x = a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta, \ldots \quad \text{(VIII)},$$

puis établir que les figures en x_1, y_1, z_1, et en ξ, η, ζ satisfont aux formules de l'homologie (IV).

La première des trois formules donnera

$$a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + aX + bY + cZ + d}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + AX + BY + CZ + D},$$

et l'on pourrait poser deux égalités analogues.

Mais cette première donnera quatre identités en remplaçant ξ, η, ζ par leurs expressions tirées des formules de l'homologie.

On a

$$\begin{aligned}\xi &= x_0 + \frac{x_1 - x_0}{lx_1 + my_1 + nz_1 + p}\\ &= \frac{x_1(lx_0 + 1) + my_1 x_0 + nz_1 x_0 + x_0(p - 1)}{lx_1 + my_1 + nz_1 + p}.\end{aligned}$$

De même

$$\eta = \frac{lx_1 y_0 + y_1(my_0 + 1) + nz_1 y_0 + y_0(p - 1)}{lx_1 + my_1 + nz_1 + p},$$

et

$$\zeta = \frac{lx_1 z_0 + my_1 z_0 + z_1(nz_0 + 1) + z_0(p - 1)}{lx_1 + my_1 + nz_1 + p}.$$

En substituant ces valeurs dans $a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta$, on a une expression dont le numérateur sera

$$\begin{aligned}&x_1[a_0(lx_0 + 1) + a_1 ly_0 + a_2 lz_0]\\ &+ y_1[a_0 mx_0 + a_1(my_0 + 1) + a_2 mz_0]\\ &+ z_1[a_0 nx_0 + a_1 ny_0 + a_2(nz_0 + 1)]\\ &+ (p - 1)(a_0x_0 + a_1y_0 + a_2z_0),\end{aligned}$$

et qui aura pour dénominateur $lx_1 + my_1 + nz_1 + p$.

Posons, pour abréger, $A' = a_0x_0 + a_1y_0 + a_2z_0$, le numérateur devient

$$x_1(lA' + a_0) + y_1(mA' + a_1) + z_1(nA' + a_2) + (p - 1)A'.$$

et il reste

$$\frac{x_1(lA'+a_0)+y_1(mA'+a_1)+z_1(nA'+a_2)+(p-1)A'}{lx_1+my_1+nz_1+p}$$
$$=\frac{ax_1+by_1+cz_1+aX+bY+cZ+d}{Ax_1+By_1+Cz_1+AX+BY+CZ+D}$$
$$=\frac{ax_1+by_1+cz_1+\sigma}{Ax_1+By_1+Cz_1+\Sigma}.$$

XIII. Pour que les coordonnées x_1, y_1, z_1 ne dépassent pas le premier degré, il faut que les deux dénominateurs ne diffèrent que par un facteur constant, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}=\frac{p}{\Sigma}=R;$$

il reste alors

$$x_1(RAA'+a_0)+y_1(RBA'+a_1)+z_1(RCA'+a_2)+A'(R\Sigma-1)$$
$$=R(ax_1+by_1+cz_1+\sigma).$$

Comme cette égalité est vraie pour toutes les valeurs de x_1, y_1, z_1, on sait que les coefficients de ces variables et le terme indépendant doivent être les mêmes de part et d'autre; ainsi

$$RAA'+a_0=Ra.$$

De cette égalité et des trois autres, on tire les quatre relations

$$a_0=R(a-AA'),$$
$$a_1=R(b-BA'),$$
$$a_2=R(c-CA'),$$
$$A'=R(A'\Sigma-\sigma).$$

Ensuite, mettons b_0, b_1, b_2 et b', au lieu de a_0, a_1, a_2

et de a, b, c; on a de même

$$b_0 = \mathrm{R}(a' - \mathrm{A}\mathrm{B}'),$$
$$b_1 = \mathrm{R}(b' - \mathrm{B}\mathrm{B}'),$$
$$b_2 = \mathrm{R}(c' - \mathrm{C}\mathrm{B}'),$$
$$\mathrm{B}' = \mathrm{R}(\mathrm{B}'\Sigma - \sigma').$$

On voit que

$$\mathrm{B}' = b_0 x_0 + b_1 y_0 + b_2 z_0 \quad \text{et} \quad \sigma' = a'\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + c'\mathrm{Z} + d'.$$

On aurait encore quatre relations avec c_0, c_1, c_2 :

$$c_0 = \mathrm{R}(a'' - \mathrm{A}\mathrm{C}'),$$
$$c_1 = \mathrm{R}(b'' - \mathrm{B}\mathrm{C}'),$$
$$c_2 = \mathrm{R}(c'' - \mathrm{C}\mathrm{C}'),$$
$$\mathrm{C}' = \mathrm{R}(\mathrm{C}'\Sigma - \sigma'');$$

en tout douze, pour trouver x_0, y_0, z_0 et X, Y, Z, ainsi que la ligne p et le nombre R, avec les angles α, β, γ et ω; mais nous avons

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

ce qui réduit à onze le nombre des inconnues.

XIV. Les trois premières des relations précédentes donnent

$$\frac{a_0}{\mathrm{A}} - \frac{a_1}{\mathrm{B}} = \mathrm{R}\left(\frac{a}{\mathrm{A}} - \frac{b}{\mathrm{B}}\right), \quad \frac{a_0}{\mathrm{A}} - \frac{a_2}{\mathrm{C}} = \mathrm{R}\left(\frac{a}{\mathrm{A}} - \frac{c}{\mathrm{C}}\right),$$

ce qui élimine A'; ces égalités reviennent à

$$a_0\mathrm{B} - a_1\mathrm{A} = \mathrm{R}(a\mathrm{B} - b\mathrm{A}), \quad a_0\mathrm{C} - a_2\mathrm{A} = \mathrm{R}(a\mathrm{C} - c\mathrm{A}).$$

Divisant pour éliminer R et réduisant, on a

$$a_0\mathrm{A}(b\mathrm{C} - c\mathrm{B}) + a_1\mathrm{B}(c\mathrm{A} - a\mathrm{C}) + a_2\mathrm{C}(a\mathrm{B} - b\mathrm{A}) = 0,$$

égalité où il faut transporter les expressions connues de

$$a_0 = \cos\alpha_0 = \cos x\xi, \quad a_1 = \cos\alpha_1 = \cos x\eta, \quad a_2 = \cos\alpha_2 = \cos x\zeta,$$

c'est-à-dire

$$a_0 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega \sin^2\alpha,$$
$$a_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$a_2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\omega).$$

Posant, pour abréger,

$$A(bC - cB) = e,\quad B(cA - aC) = e_1,\quad C(aB - bA) = e_2,$$

l'égalité ci-dessus devient

$$ea_0 + e_1a_1 + e_2a_2 = 0.$$

Mais ces trois coefficients présentent la relation évidente

$$e + e_1 + e_2 = 0.$$

Donc

$$\frac{e_1}{e} + \frac{e_2}{e} = -1.$$

Posons

$$\frac{e_1}{e} - \frac{e_2}{e} = \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{e_1}{e} = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1),\quad \frac{e_2}{e} = -\frac{1}{2}(\varepsilon + 1),$$

l'égalité $a_0 + \frac{e_1}{e}a_1 + \frac{e_2}{e}a_2 = 0$ devient

$$2a_0 = a_1(1 - \varepsilon) + a_2(1 + \varepsilon).$$

XV. Dans cette équation, les inconnues sont l'angle ω, ainsi que $\lambda = \cos\alpha$, $\mu = \cos\beta$, $\nu = \cos\gamma$, avec la relation $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$.

Observons encore que $2\sin^2\frac{1}{2}\omega = 1 - \cos\omega$, et que $2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega = \cos\omega$, les expressions précédentes deviennent

$$a_0 = 1 - (1 - \cos\omega)(1 - \lambda^2) = (1 - \cos\omega)\lambda^2 + \cos\omega,$$
$$a_1 = (1 - \cos\omega)\mu\lambda - \nu\sin\omega,$$
$$a_2 = (1 - \cos\omega)\nu\lambda + \mu\sin\omega.$$

On en conclut

$$2a_0 = (1-\varepsilon)[(1-\cos\omega)\mu\lambda - \nu\sin\omega]$$
$$+ (1+\varepsilon)[(1-\cos\omega)\nu\lambda + \mu\sin\omega],$$

ce qui se réduit à

$$\lambda[2\lambda - (\mu+\nu) + \varepsilon(\mu-\nu)]$$
$$= \sin\omega[\mu - \nu + \varepsilon(\mu+\nu)]$$
$$+ \cos\omega[2\lambda^2 - \lambda(\mu+\nu) + \lambda\varepsilon(\mu-\nu) - 2].$$

Les relations symétriques à la première seront

$$e' b_0 + e'_1 b_1 + e'_2 b_2 = 0,$$

avec la relation

$$e' + e'_1 + e'_2 = 0.$$

Mais ici, comme l'angle β domine les autres, il faut écrire

$$\frac{e'}{e'_1} b_0 + b_1 + \frac{e'_2}{2} b_2 = 0,$$

et prendre

$$\varepsilon' = \frac{e'_2}{e'_1} - \frac{e'}{e'_1},$$

en commençant par l'indice 2 qui, avec $e_1 - e_2$, avait le signe négatif. Alors, comme $e_1 - e_2$ entraînait $\mu - \nu$, puisque l'indice 1 correspond à μ et l'indice 2 à ν, on prendra ici $\nu - \lambda$ pour $e'_2 - e'$.

De même la troisième relation sera

$$\frac{e''}{e''_2} c_0 + \frac{e''_1}{e''_2} + c_2 = 0,$$

et l'on a

$$e'' + e''_1 + e''_2 = 0,$$

ce qui fait poser, par la symétrie indiquée,

$$\frac{e'' - e''_1}{e''_2} = \varepsilon''.$$

Cette différence correspond à $\lambda - \mu$.

Dans l'égalité que l'on vient d'obtenir, posons, pour abréger,

$$E = \lambda[2\lambda - (\mu + \nu) + \varepsilon(\mu - \nu)] \quad \text{et} \quad H = \mu - \nu + \varepsilon(\mu + \nu),$$

elle devient

$$(1) \qquad E = H \sin\omega + \cos\omega(E - 2).$$

On aura de même

$$(2) \qquad F = I \sin\omega + \cos\omega(F - 2),$$

$$(3) \qquad G = K \sin\omega + \cos\omega(G - 2),$$

en posant

$$F = \mu[2\mu - (\nu + \lambda) + \varepsilon'(\nu - \lambda)], \quad I = \nu - \lambda + \varepsilon'(\nu + \lambda),$$

et

$$G = \nu[2\nu - (\lambda + \mu) + \varepsilon''(\lambda - \mu)], \quad K = \lambda - \mu + \varepsilon''(\lambda + \mu).$$

XVI. Divisons (1) par (2), il vient

$$\frac{E}{F} = \frac{H \operatorname{tang}\omega + E - 2}{I \operatorname{tang}\omega + F - 2};$$

d'où

$$(4) \qquad 2(F - E) = \operatorname{tang}\omega(FH - EI);$$

de même

$$(5) \qquad 2(E - G) = \operatorname{tang}\omega(EK - GH),$$

et

$$(6) \qquad 2(G - F) = \operatorname{tang}\omega(GI - FK).$$

Ajoutant et observant que les premiers membres se détruisent, on en conclura

$$(7) \qquad FH + EK + GI = EI + GH + FK.$$

En y remplaçant E, H,... par leurs valeurs, on a une équation du troisième degré en λ, μ, ν.

XVII. De (1) et (2), on tire

$$\sin\omega = \frac{2(F - E)}{FH - EI + 2(I - H)}, \quad \cos\omega = \frac{FH - EI}{FH - EI + 2(I - H)}.$$

Élevant au carré, ajoutant et réduisant, on trouve

$$(E - F)^2 + (H - I)(FH - EI + I - H) = 0.$$

On obtiendra de même

$$(F - G)^2 + (I - K)(GI - FK + K - I) = 0$$

et

$$(G - E)^2 + (K - H)(EK - GH + H - K) = 0.$$

Ajoutant et réduisant, on obtient

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(E^2 + F^2 + G^2 - FG - EG - EF) \\ \quad + (H^2 - IK)(G + F - 2) \\ \quad + (I^2 - HK)(G + E - 2) \\ \qquad + (K^2 - IH)(E + F - 2) = 0. \end{array} \right.$$

En remplaçant encore E, F, G et H, I, K par leurs valeurs en fonction de λ, μ, ν, on reconnaît que cette équation est du quatrième degré; donc elle ne se confond pas avec (7). Du reste, (7) et (8) ne sont pas des identités, car il y a, par exemple, un seul terme en λ^3 dans la première et en λ^4 dans la seconde, comme on le voit sans peine.

Ainsi la question, déjà ramenée à la recherche de l'axe de rotation autour duquel se décrit l'angle ω, se résout en éliminant les cosinus λ, μ, ν entre les équations (7) et (8), et entre la relation bien connue

$$(9) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Sans doute cette élimination serait pénible dans la discussion et la pratique; mais il suffit que l'on soit par-

venu à trois équations numériques entre trois inconnues pour que l'on considère toujours comme possible de calculer ces inconnues λ, μ, ν, et d'obtenir ainsi les angles α, β, γ correspondant à ces cosinus.

XVIII. Cette complication ne se présentait pas pour les figures planes, parce que l'axe de rotation était connu comme perpendiculaire au plan de la figure.

Ici, du reste, dès que l'on connaît $\lambda = \cos\alpha$, $\mu = \cos\beta$, $\nu = \cos\gamma$, on connaît $\tang\omega$ par une des relations (4), (5), (6).

Ensuite, connaissant α, β, γ et ω, on aura a_0, b_0, c_0 par les formules du n° X ; on aura de même a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2.

XIX. On a aussi, n° XIII, $\dfrac{a_0}{a_1} = \dfrac{a - \text{A}\text{A}'}{b - \text{B}\text{A}'}$, ce qui donne A′. On obtiendra de même B′ et C′, et, comme on a posé au n° XII

$$\text{A}' = a_0 x_0 + a_1 y_0 + a_2 z_0, \ldots,$$

il en résulte trois relations qui donnent x_0, y_0, z_0.

De plus, connaissant A′, une relation telle que

$$a_0 = \text{R}(a - \text{A}\text{A}')$$

donne

$$\text{R} = \frac{a_0}{a - \text{A}\text{A}'}.$$

On connaît donc $l = \text{AR}$, $m = \text{BR}$, $n = \text{CR}$.

XX. Maintenant, dans les relations

$$\text{A}' = \text{R}(\text{A}'\Sigma - \sigma), \quad \text{B}' = \text{R}(\text{B}'\Sigma - \sigma'), \quad \text{C}' = \text{R}(\text{C}'\Sigma - \sigma''),$$

où

$$\Sigma = \text{AX} + \text{BY} + \text{CZ} + \text{D} \quad \text{et} \quad \sigma = a\text{X} + b\text{Y} + c\text{Z} + d, \ldots,$$

tout est connu, excepté X, Y, Z, dont on obtiendra ainsi les valeurs.

Enfin, Σ étant déterminé par ces trois quantités, on trouvera

$$p = R\Sigma.$$

Ainsi la question est complétement résolue.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 928

(voir 2e série, t. VIII, p. [illegible]),

PAR M. A. GARET,

Élève du lycée de Clermont.

Former l'équation des coniques qui passent par deux points imaginaires conjugués, l'un de ces points ayant pour coordonnées

$$x = a\left(\cos 45^\circ + \sqrt{-1}\sin 45^\circ\right),$$
$$y = b\left(\cos 45^\circ - \sqrt{-1}\sin 45^\circ\right),$$

et qui ont pour centre l'origine des coordonnées. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y. (J.-CH. DUPAIN.)

Ces coniques étant rapportées à leur centre, leur équation est de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 - 1 = 0.$$

J'exprime qu'elles passent par les points donnés dans

l'énoncé, et j'ai, en tenant compte de ce que

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(1) \qquad -Ab^2\sqrt{-1} + Bab + Ca^2\sqrt{-1} - 1 = 0,$$

$$(2) \qquad +Ab^2\sqrt{-1} + Bab - Ca^2\sqrt{-1} - 1 = 0.$$

L'une quelconque de ces relations donne, en égalant à zéro les parties réelles et les parties imaginaires,

$$Bab - 1 = 0, \quad Ca^2 - Ab^2 = 0,$$

$$B = \frac{1}{ab}, \quad C = \frac{Ab^2}{a^2};$$

de sorte que l'équation des coniques répondant à l'énoncé est

$$(3) \qquad Ay^2 + \frac{xy}{ab} + \frac{Ab^2}{a^2}x^2 - 1 = 0.$$

x et y étant les coordonnées du point de contact d'une tangente parallèle à l'axe des y, on a

$$(4) \qquad 2Ay + \frac{x}{ab} = 0.$$

Éliminant A entre les équations (3) et (4), j'ai l'équation du lieu, qui est

$$a^2xy^2 - b^2x^3 - 2a^3by = 0.$$

Cette équation donne une courbe facile à construire.

Note. — La question 927 a été résolue de même par MM. Garet et G. Lalanne, élèves du lycée de Clermont.

Question 931

(voir 2e série, t. VIII, p. 192);

PAR M. FOURET.

Lorsque x et y représentent les inverses des segments formés sur des axes de coordonnées par une droite mo-

bile, l'équation $\varphi(x, y) = 0$ est, comme on sait, l'équation d'une courbe enveloppe de cette droite. Supposant les axes rectangulaires, on demande la signification géométrique de la fonction différentielle

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2},$$

et, par suite, ce que représente par rapport à la courbe $\varphi(x, y) = 0$ l'intégrale de cette fonction différentielle prise entre des limites données. (Abel Transon.)

Soient r la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la droite mobile et θ l'angle que fait cette perpendiculaire avec l'axe des x, on a

$$\frac{1}{x} = \frac{r}{\cos\theta}, \quad \frac{1}{y} = \frac{r}{\sin\theta};$$

d'où

(1) $$x = \frac{\cos\theta}{r}, \quad y = \frac{\sin\theta}{r}.$$

En différentiant ces deux équations, on obtient

(2) $$\left\{ \begin{aligned} dx &= -\frac{\cos\theta}{r^2}\,dr - \frac{\sin\theta}{r}\,d\theta, \\ dy &= -\frac{\sin\theta}{r^2}\,dr + \frac{\cos\theta}{r}\,d\theta. \end{aligned} \right.$$

On conclut des équations (1)

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{r^2},$$

et des équations (2)

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{r^4}.$$

Par suite

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}.$$

On voit immédiatement que le second membre de cette égalité est la différentielle de l'arc de la courbe dont les coordonnées polaires sont r et θ, c'est-à-dire de la podaire par rapport à l'origine de la courbe $\varphi(x, y) = 0$.

L'intégrale prise entre des limites données de la fonction différentielle

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2}$$

représente, par conséquent, l'arc de la podaire compris entre les points de cette courbe qui correspondent aux limites en question.

Question 935

(voir 2e série, t. VIII, p. 240);

Par M. E. NETTO,

Étudiant en Mathématiques à Berlin.

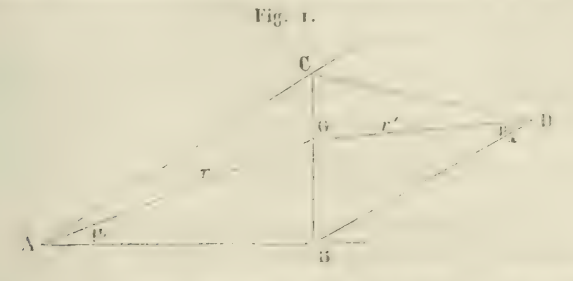
Étant données sur un même plan deux figures composées : l'une du point O *et des droites* A *et* B ; *l'autre du point* O′ *et des droites* A′ *et* B′, *mener par chacun des points donnés une transversale telle, que les segments compris sur l'une entre le point* O *et les droites* A *et* B *soient égaux aux segments compris sur l'autre entre le point* O′ *et les droites* A′ *et* B′.

Même problème en remplaçant dans chaque figure les droites par des circonférences passant par le point donné. (G. Fouret.)

Dans les angles donnés les points O, O′ sont fixés par les longueurs r, r_1 des droites menées de ces points aux sommets des angles, et par les angles μ, μ_1 que ces droites forment avec des côtés des angles donnés. Si, en supposant le problème résolu, la droite COB (*fig.* 1) représente la transversale cherchée dans le premier angle CAB,

en transportant la seconde figure de manière que les lignes égales coïncident, comme l'indique la *fig.* 1, on

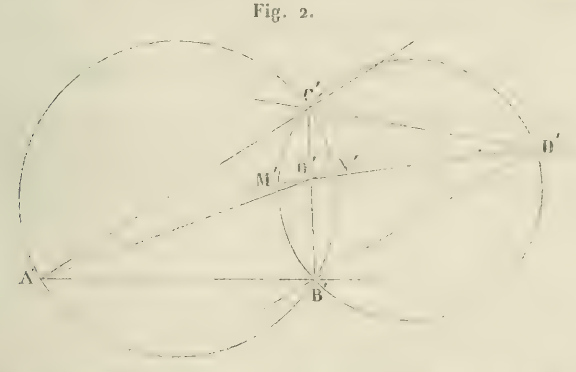
Fig. 1.



formera un quadrilatère ABDC, et il sera facile de construire une figure semblable à ce quadrilatère.

A cet effet, décrivons sur une droite quelconque B′C′ (*fig.* 2) des segments capables (B′A′C′, B′D′C′) des angles BAC, BDC, et prenons sur les arcs B′M′C′, B′N′C,

Fig. 2.



les points M′, N′, de manière que les angles B′A′N′, B′D′M′ soient respectivement égaux aux angles BAO, BDO (*fig.* 1), ou μ, μ_1. Cela fait, il faut mener par les points M′, N′ des droites M′O′D′, N′O′A′ qui rencontrent la corde B′C′ en un point O′ tel, qu'on ait

$$\frac{O'A'}{O'D'} = \frac{r}{r_1}.$$

Or

$$O'M'.O'D' = O'B'.O'C' = O'N'.O'A';$$

d'où

$$\frac{O'M'}{O'N'} = \frac{O'A'}{O'D'} = \frac{r}{r_1}.$$

On obtiendra donc O′ en déterminant sur la droite C′B′ un point dont les distances aux deux points M′, N′ soient entre elles dans le rapport donné $\frac{r}{r_1}$: ce qui est un problème connu. En menant les droites N′O′, M′O′, on aura les sommets A′, D′ du quadrilatère A′B′D′C′, qui sera ainsi déterminé. La construction d'une figure semblable ABCD, dans laquelle les droites AO, DO sont les homologues de A′O′, D′O′, donnera la solution de la question proposée (*).

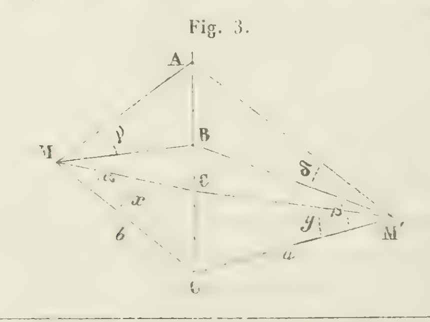
Solution de la même question;

Par M. COHEN,

Élève du lycée de Strasbourg (classe de M. Pruvost).

En supposant le problème résolu, on a deux figures dont les bases sont superposables. Amenons ces deux bases à coïncider (*fig.* 3) et joignons les intersections M, M′

Fig. 3.



(*) Cette solution géométrique nous fait regretter que M. *Netto* n'ait rien dit du cas où les droites sont remplacées par des circonférences.

(G.)

des droites A, B et A′, B′ par la droite MM′ qui coupe AB en C, il en résulte deux faisceaux qui ont un rayon commun et même rapport anharmonique.

Soient $OMM' = x$, $OM'M = y$, $BMO = \alpha$, $BM'O = \beta$, $AMB = \gamma$, $AM'B = \delta$, on aura la relation

$$\frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)} : \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin\alpha} = \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)} : \frac{\sin(\beta - \delta)}{\sin\delta},$$

ou, en chassant les dénominateurs et développant

$$\sin(\alpha - x) \quad \text{et} \quad \sin(\beta - y):$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin\alpha . \sin(\beta + \delta)}{\sin\delta . \sin(\alpha + \gamma)} \sin x (\sin\beta \cos y - \sin y \cos\beta) \\ \qquad = \sin y (\sin\alpha \cos x - \sin x \cos\alpha). \end{array} \right.$$

En posant $OM' = a$, $OM = b$, le triangle OMM′ donne

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a}{b},$$

d'où

$$\sin y = \frac{b}{a} \sin x,$$

et

$$\cos y = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 x}.$$

En remplaçant $\sin y$ et $\cos y$ par ces valeurs, la relation (1) devient, si l'on pose $\dfrac{b \sin\delta . \sin(\alpha + \gamma)}{a \sin\alpha . \sin(\beta + \delta)} = A$,

$$A(\sin\alpha \cos x - \sin x \cos\alpha) = \sin\beta \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 x} - \frac{b}{a} \cos\beta \cos x.$$

Isolons le radical et élevons au carré les deux membres;

il viendra

$$\left(A^2\cos^2\alpha - 2A\frac{b}{a}\cos\alpha\cos\beta + \frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2 x + A^2\sin^2\alpha\cos^2 x$$
$$+ 2\left(A\frac{b}{a}\sin\alpha\cos\beta - A^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\sin x\cos x = \sin^2\beta.$$

Si nous remplaçons le second membre, $\sin^2\beta$, par $\sin^2\beta(\cos^2 x + \sin^2 x)$, l'équation deviendra homogène en $\sin x$ et $\cos x$, et en divisant par $\cos^2 x$ nous aurons une équation du second degré en $\tang x$, qui permettra de construire $\tang x$, et par suite l'angle x ; on pourra alors former le triangle OMM' et achever la figure MABOM'.

Note du Rédacteur. — M. *Cohen* indique d'une manière très-succincte comment le second cas de la question proposée peut se ramener au premier, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

La méthode suivie par M. *Netto* conduit très-simplement à une solution directe de ce second cas.

En effet, soient O et M les points d'intersection des circonférences A, B ; et, de même, O', M' les points communs aux circonférences A', B'. Si les droites COD, C'O'D' satisfont aux conditions du problème, on aura O'C' = OC, O'D' = OD, et en déplaçant l'une des deux figures, par exemple C'O'D'M', il sera possible de faire coïncider les points C', O', D' avec les points C, O, D, et de former ainsi un quadrilatère MCM'D, dont les côtés MC, CM', M'D, DM, feront avec la diagonale COD, des angles MCD, M'CD, M'DC, MDC, qui seront connus, parce que leurs côtés interceptent sur les circonférences considérées des arcs donnés. Il sera donc facile de construire un quadrilatère *mcm'd* semblable à MCM'D, et de trouver sur la diagonale *cd* homologue à CD un point *o* tel

qu'on ait $\frac{om}{om'} = \frac{OM}{OM'}$. Pour déterminer ensuite la droite COD, il ne restera plus qu'à mener par le point O, une droite OC faisant avec OM un angle égal à l'angle *moc*.

Le problème peut admettre deux solutions, parce qu'il y a, généralement, sur la droite *cd*, deux points satisfaisant à l'égalité $\frac{om}{om'} = \frac{OM}{OM'}$.

(G.)

Questions 955 *et* 956

(voir 2e série, t. VIII, p. [illegible]);

PAR M. CHARLES COHEN,
Élève du lycée de Strasbourg, admis le 82e à l'École Polytechnique.

955. *En deux points d'une ellipse on mène les normales; la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde passe par les milieux des segments interceptés entre les normales par chacun des axes.*

(LAGUERRE.)

Si l'on rapporte l'ellipse proposée à ses axes de symétrie, une normale en un point $A(x', y')$ de la courbe a pour équation

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x').$$

En faisant dans cette relation $y = 0$, on voit que l'abscisse du point où la normale rencontre l'axe OX a pour valeur

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x'.$$

De même, l'abscisse du point où la normale au point $B(x'', y'')$ de la courbe rencontre l'axe OX est

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x''.$$

Par le centre O de l'ellipse considérée, menons le demi-diamètre OCD, conjugué à la corde AB et rencontrant cette corde en son milieu, C, et l'ellipse au point D. La tangente en D à l'ellipse est parallèle à AB; l'ellipse homothétique et concentrique à la proposée et passant par le point C touchera la droite AB en ce point. Il résulte de là que la perpendiculaire au milieu de AB est une normale au point C $\left(\frac{x'+x''}{2}, \frac{y'+y''}{2}\right)$ à la seconde ellipse. Comme d'ailleurs les axes des deux ellipses sont proportionnels, le point où cette perpendiculaire rencontre l'axe OX a pour abscisse

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}\,\frac{x'+x''}{2},$$

demi-somme des abscisses des points où les normales en A et en B à la première ellipse rencontrent l'axe OX.

La proposition est donc démontrée.

956. *En deux points d'un ellipsoïde, on mène des normales; le plan mené par le milieu de la corde et perpendiculairement à cette corde passe par les milieux des lignes qui joignent les points de rencontre des normales avec chacun des plans de symétrie.*

(Laguerre.)

Rapportons l'ellipsoïde à ses axes principaux, et soit $A(x', y', z')$ un point de l'ellipsoïde par lequel on mène une normale à cet ellipsoïde. Par le point A, menons un plan parallèle au plan des zx. L'intersection de ce plan et de l'ellipsoïde est une ellipse E qui se projette en vraie grandeur sur le plan des zx, suivant une ellipse E′ homothétique et concentrique à l'ellipse principale du plan des zx.

La tangente menée à l'ellipse E par le point A forme, avec la normale en ce point à l'ellipsoïde, un angle droit.

Cette tangente, qui est l'un des côtés de l'angle droit, est parallèle au plan des zx; donc la projection de cet angle droit sur le plan des zx est un angle droit; et, comme la tangente à l'ellipse E se projette suivant une tangente à l'ellipse E', il en résulte que la normale à l'ellipsoïde au point A se projette sur le plan des zx suivant une normale à l'ellipse E'.

La coordonnée x du point où la normale en A à l'ellipsoïde rencontre le plan des xy, qui est égale à l'abscisse du point où la normale à l'ellipse E' rencontre OX, a pour valeur, comme on l'a vu précédemment,

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x'.$$

Par analogie, la coordonnée y de ce même point sera

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} y'.$$

De même, les coordonnées du point où la normale au point $B(x'', y'', z'')$ rencontre le plan des xy seront

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x'' \quad \text{et} \quad \frac{b^2 - c^2}{b^2} y''.$$

En considérant, comme dans le problème précédent, un ellipsoïde homothétique et concentrique à l'ellipsoïde donné, et touchant la corde AB en son milieu C, on aura, pour les coordonnées du point où la normale en $C\left(\frac{x' + x''}{2}, \frac{y' + y''}{2}, \frac{z' + z''}{2}\right)$ à ce second ellipsoïde rencontre le plan des xy, les valeurs

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} \frac{x' + x''}{2} \quad \text{et} \quad \frac{b^2 - c^2}{b^2} \frac{y' + y''}{2};$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Note. — Des solutions peu différentes nous ont été adressées par M. Harkema, étudiant en mathématiques à Saint-Pétersbourg, et M. Fould, élève à Sainte-Barbe.

CORRESPONDANCE.

I. *M. E. Lemoine* nous adresse la Note suivante :

A la page 55 (t. I) du *Traité de Calcul différentiel* de *M. Serret,* on lit :

« Il s'agit de savoir dans quel cas la fonction $y = a^x - x$ peut s'annuler, a étant un nombre compris entre o et 1 On a

$$\frac{dy}{dx} = a^x \mathrm{L}a - 1,$$

la caractéristique L désignant un logarithme *népérien*.

» On voit que la fonction est décroissante tant qu'on aura

$$a^x < \frac{1}{\mathrm{L}a}, \quad \text{ou} \quad x < \frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{\mathrm{L}a}\right)}{\mathrm{L}a}.$$

Elle sera croissante dans le cas contraire. »

Il n'en est pas ainsi. Car : 1° a étant compris entre o et 1, $\mathrm{L}a$ est négatif; donc $\frac{dy}{dx}$ est toujours négatif, et, par suite, y toujours décroissant; 2° $\frac{1}{\mathrm{L}a}$ étant négatif, son logarithme est imaginaire, et l'inégalité

$$x < \frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{\mathrm{L}a}\right)}{\mathrm{L}a}$$

n'a plus de sens.

On voit facilement que y est négatif pour de grandes valeurs positives de x, et qu'il est positif pour des valeurs négatives de x (*), et, puisque y est toujours dé-

(*) La valeur de y est négative pour $x = 1$ et $x > 1$, et positive pour $x = a$ et $x < a$.

croissant, il existe une valeur unique de x pour laquelle y s'annule. Donc, *quand a est compris entre* o *et* 1, *il y a toujours un nombre qui, dans la base a, est égal à son logarithme* (*).

Dans l'hypothèse $a > 1$, on trouve facilement que y ne peut s'annuler qu'autant que l'on a $a < e^{\frac{1}{e}}$, en suivant la marche indiquée par M. Serret.

Note du Rédacteur. — Dans l'hypothèse $a > 1$, on peut distinguer trois cas, suivant qu'on a

$$a < e^{\frac{1}{e}}, \quad a = e^{\frac{1}{e}}, \quad a > e^{\frac{1}{e}}.$$

Dans le premier, l'équation $a^x - x = 0$ a deux racines positives comprises : l'une entre 1 et e; l'autre entre e et $+\infty$.

Si $a = e^{\frac{1}{e}}$, l'équation $a^x - x = 0$ a une racine double égale à la base e du système des logarithmes *népériens*.

Enfin, lorsqu'on a $a > e^{\frac{1}{e}}$, l'équation considérée n'admet aucune solution réelle.

De ce que l'inégalité $\frac{1}{\mathrm{L}a} > e$ donne à la fois $a > 1$ et $a < e^{\frac{1}{e}}$, on peut conclure que, dans tout système de logarithmes dont le module $\frac{1}{\mathrm{L}a}$ surpasse le nombre e, il y a deux nombres qui sont égaux à leurs logarithmes.

Si le module $\frac{1}{\mathrm{L}a}$ est égal à e, le nombre e est le seul, dans le système considéré, qui soit égal à son logarithme.

Enfin, si, la base a étant supposée plus grande que l'unité, le module $\frac{1}{\mathrm{L}a}$ est moindre que e, aucun nombre du système ne peut être égal à son logarithme. (G.)

(*) Ce nombre est compris entre a et 1.

II. *M. Burtaire*, Maître auxiliaire au lycée de Nancy, nous a adressé une solution de la question 945, semblable à celle de M. Aouit (p. 374, numéro d'août).

QUESTIONS.

961. Sur chacun des trois côtés d'un triangle ABC, on décrit, dans le plan P de ce triangle, deux triangles équilatéraux; et il s'agit de démontrer que :

1° Le triangle qui a pour sommets les centres α, β, γ des triangles équilatéraux extérieurs à ABC est équilatéral; 2° le triangle qui a pour sommets les centres α', β', γ' des trois autres triangles équilatéraux est équilatéral; 3° la somme des deux côtés $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ est égale au côté du triangle équilatéral dont ABC est la projection orthogonale sur le plan P; 4° la différence des deux côtés $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ est égale au côté du triangle équilatéral qui peut être considéré comme la projection orthogonale de ABC sur un certain plan Q. (Lionnet.)

962. Par un point P pris dans le plan d'une conique, on mène une sécante qui coupe en A la courbe, et en B un certain diamètre fixe. Par les points A et B, on mène des parallèles au diamètre et à la direction conjuguée : on demande le lieu de leurs points d'intersection.

Cas particulier. — La conique est un cercle, et le point fixe est pris sur une tangente. Forme de la courbe. (A. Guébhard.)

(Le lieu, qui est du quatrième degré, donne, dans le cas particulier, une courbe étudiée par Cramer dans son *Analysis infinitorum*.)

NOTE SUR UN PROBLÈME ÉLÉMENTAIRE DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

Par M. LIONNET.

De toutes les solutions de ce problème : *trouver le rayon d'une sphère solide en faisant usage de la règle et d'un compas*, la plus directe et la plus simple est celle qui consiste à trouver d'abord, sur la surface de cette sphère, trois points d'une circonférence de grand cercle. Mais, dans les Traités de géométrie élémentaire et les examens d'admission aux Écoles du Gouvernement, cette première partie du problème à résoudre laisse toujours quelque chose à désirer sous le rapport de la rigueur. Voici une manière de procéder qui nous paraît à l'abri de toute objection.

D'un point P comme pôle on décrit une circonférence quelconque; d'un point A pris sur cette circonférence comme pôle, avec une corde moindre que la droite AP, on décrit une seconde circonférence qui rencontre la première en un point B; puis du point B comme pôle, avec la même corde, on décrit une troisième circonférence qui *coupera la seconde* en deux points Q et R. Le centre O de la sphère et chacun des points P, Q, R étant également distants des points A et B, les quatre points O, P, Q, R sont situés dans le plan perpendiculaire à la corde AB en son milieu; donc les trois points P, Q, R sont sur la circonférence du grand cercle suivant laquelle ce plan coupe la surface de la sphère.

Pour que cette construction réussisse, il suffit que les circonférences décrites des points A et B comme pôles se

coupent, ou, ce qui revient au même, que le triangle sphérique équilatéral ABQ soit possible, ou, enfin, que la corde AB soit moindre que le côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle. Or le triangle rectiligne isoscèle PAB peut être considéré comme inscrit dans un cercle de la sphère; donc le plus petit AB de ses trois côtés est moindre que le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce même cercle et, par suite, moindre que le côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle.

DÉMONSTRATIONS NOUVELLES DE DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

Par M. RETSIN,

Professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Gand.

I.

Les projections, sur les côtés d'un triangle, d'un point quelconque M *de la circonférence circonscrite sont situées sur une même droite qui divise en deux parties égales la droite menée du point* M *au point de concours* H *des hauteurs du triangle.*

1° Soient α, β, γ (*fig.* 1) ces trois projections. Prolongeons la droite $M\alpha$ jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence, et menons la droite ANP.

En vertu des quadrilatères inscriptibles $M\alpha\beta C$, MNAC, on a

$$N\alpha\beta = MCA = 180^\circ - MNA.$$

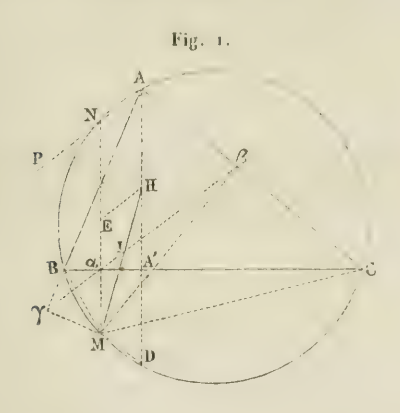
Donc $\alpha\beta$ est parallèle à la corde AN.

Le quadrilatère inscriptible $M\alpha B\gamma$ donne

$$M\alpha\gamma = MB\gamma = MNP,$$

car les deux derniers angles ont même mesure. Donc $\alpha\gamma$ est parallèle à AP, et les trois points α, β, γ se trouvent sur une même droite parallèle à AP.

Fig. 1.



2° Soit D le point où la hauteur AA′ rencontre la circonférence circonscrite au triangle. Nous savons que $A'D = A'H$, si donc nous prenons $\alpha E = \alpha M$, le quadrilatère MEHD sera un trapèze isoscèle, et comme le trapèze MNAD est lui-même isoscèle, HE est parallèle à AN, donc aussi à $\alpha\beta$. Il résulte de là que la droite $\alpha\beta$ qui passe par le milieu α du côté ME, dans le triangle MEH, est parallèle à un second côté de ce triangle ; elle passe donc par le milieu du troisième côté MH.

II.

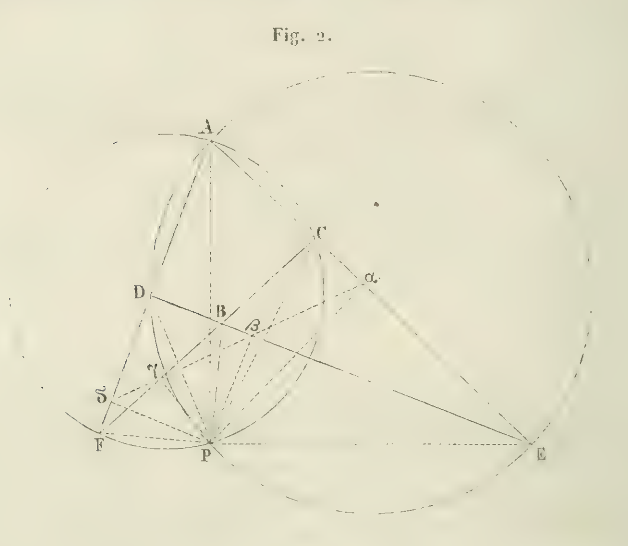
Quatre droites situées dans le même plan forment quatre triangles ; dans chacun d'eux existe un point de

rencontre des hauteurs; les quatre points de rencontre sont situés sur une même droite. (*Nouvelles Annales*, 1846, p. 13, et 1847, p. 196.)

Lemme. — Les circonférences de cercle circonscrites à ces quatre triangles passent par un même point.

Soient ECA, EBD, FDA, FBC (*fig.* 2) les quatre droites et P le second point d'intersection des circonférences circonscrites aux triangles ADE, ACF.

Fig. 2.



Les quadrilatères inscrits ADPE, ACPF donnent

$$DEP = DAP = FCP$$

et

$$CFP = CAP = EDP;$$

donc les quadrilatères BCEP, BDFP sont inscriptibles, et les circonférences circonscrites aux triangles BCE, BDF passent aussi par le point P.

Arrivant au théorème principal, nous remarquons que les projections α, β, γ et δ du point P sur les quatre droites données sont situées sur une même droite, car, prises trois à trois, elles sont les projections du point P sur les côtés des quatre triangles. Cette droite $\alpha\beta\gamma\delta$ divise en parties égales les quatre droites menées du point P aux points de rencontre des hauteurs dans les quatre triangles; donc ces points de rencontre sont situés sur une même droite parallèle à $\alpha\beta\gamma\delta$.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 951

(voir 2e série, t. VIII, p. 336),

Par M. J. CHATELAIN,

Professeur au collége d'Altkirch.

Démontrer la formule

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tang x} = \frac{1}{2}\tang\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tang\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\tang\frac{x}{2^3} + \ldots$$

(Laisant.) (*)

La relation connue

$$\tang x = \frac{2\tang\frac{x}{2}}{1-\tang^2\frac{x}{2}}$$

(*) *Voir*, à l'article Correspondance, le n° 1.

donne

$$\frac{1}{2\,\mathrm{tang}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{\mathrm{tang}\,x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}.$$

En remplaçant successivement dans cette dernière égalité x par $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2^2}$, ..., $\frac{x}{2^{n-1}}$, on a

$$\frac{1}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^2}} - \frac{1}{\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^2},$$

$$\frac{1}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^3}} - \frac{1}{\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^3},$$

. . . .

$$\frac{1}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^n}.$$

Ces n relations donnent

$$\frac{1}{2^n\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{\mathrm{tang}\,x}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^n}.$$

Or la limite de $\frac{1}{2^n\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^n}}$ est $\frac{1}{x}$; en effet,

$$\frac{1}{2^n\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2^n}} = \frac{1}{x} \times \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \times \cos\frac{x}{2^n};$$

et pour $n = \infty$, le second membre de cette dernière égalité se réduit à $\frac{1}{x}$. On a donc

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x} = \lim\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots\right).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. Manuel de Cordoba, élève de l'Université de Madrid, et par M. Realis.

Question 907

(voir 2e série, t. VIII, p. 46);

PAR M. WILLIÈRE.

On donne une ellipse et une hyperbole homofocales dont O *est le centre commun. Par un point quelconque* P *de l'hyperbole, on mène des droites parallèles aux normales à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole. Soient* H *et* K *les points où ces droites coupent l'hyperbole. Par les trois points* P, H *et* K, *on fait passer un cercle, et sur ce cercle on prend le point* P', *conjugué harmonique du point* P *relativement aux deux points* H *et* K : *démontrer que la perpendiculaire élevée sur le milieu de* PP' *est la polaire du point* P *relativement à l'ellipse.* (LAGUERRE.)

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

les équations des deux coniques homofocales; en remarquant que $a^2 - b^2 = a'^2 + b'^2 = c^2$, on trouve facile-

ment, pour les points d'intersection.

$$x = \pm \frac{aa'}{c}, \quad y = \pm \frac{bb'}{c}.$$

Les deux coniques étant homofocales, les normales à l'ellipse en ces points sont tangentes à l'hyperbole, et deux de ces tangentes non parallèles auront pour équations

$$\frac{ax}{a'c} - \frac{by}{b'c} = 1,$$

$$\frac{ax}{a'c} + \frac{by}{b'c} = 1.$$

Soient

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0,$$

les équations des droites PH, PK parallèles aux normales; en les multipliant, il vient

$$\alpha\alpha' x^2 + \beta\beta' y^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) xy + \ldots = 0.$$

Or

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{ab'}{a'b}, \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{ab'}{a'b};$$

d'où

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta = 0, \quad \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} = -\frac{a^2 b'^2}{a'^2 b^2}.$$

Cela posé, si $y = mx + n$ représente la corde HK, l'équation du couple de droites PH et PK sera

$$\left(\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - 1\right)(y' - mx' - n)$$

$$2\left(\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} - 1\right)(y - mx - n).$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2}(y' + mx' - n) + \frac{y^2}{b'^2}(y' - mx' + n)$$
$$- 2xy\left(\frac{x'}{a'^2} + \frac{my'}{b'^2}\right) + \ldots = 0.$$

Par ce qui précède, on doit donc avoir

$$\frac{x'}{a'^2} + \frac{my'}{b'^2} = 0, \quad \frac{y' + mx' - n}{y' - mx' + n} = -\frac{a'^2}{b'^2};$$

d'où l'on tire

$$m = -\frac{b'^2 x'}{a'^2 y'}, \quad n = \frac{b'^2(a^2 + b^2)}{c^2 y'},$$

et l'équation de la droite HK devient

$$y + \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'} x - \frac{b'^2(a^2 + b^2)}{c^2 y'} = 0.$$

Cherchons maintenant l'équation du cercle passant par les trois points P, H, K. Je dis que ce cercle sera tangent à l'hyperbole en P (*). En effet, toute conique passant par les points P, H, K, et tangente à l'hyperbole en P, a pour équation

$$\mathrm{K}\left(\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1\right)$$
$$- \left[y + \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'} x - \frac{b'^2(a^2 + b^2)}{c^2 y'}\right]\left(\frac{xx'}{a'^2} - \frac{yy'}{b'^2} - 1\right) = 0.$$

Or le terme en xy disparaît de lui-même; il suffit donc de déterminer K de manière que les coefficients de x^2 et

(*) En général, si par un point P d'une conique on mène deux cordes PH, PK parallèles à des tangentes qui se coupent en un point d'un axe de la courbe, la circonférence qui passe par les trois points P, H, K est tangente à la conique au point P. C'est là une conséquence très-simple du théorème de Newton sur les rectangles des segments de cordes d'une courbe du second degré. (G.)

de y^2 soient égaux, ce qui donne la condition

$$\frac{K}{a'^2} - \frac{b'^2x'^2}{a'^4y'} = -\frac{K}{b'^2} + \frac{y'}{b'^2};$$

d'où

$$K = \frac{a'^4y'^2 + b'^4x'^2}{a'^2c^2y'},$$

et l'équation du cercle devient, toute réduction faite,

$$x^2 + y^2 - 2x\frac{a^2x'}{a'^2} + 2y\frac{b^2y'}{b'^2}$$
$$- \frac{a'^4y'^2 + b'^4x'^2 + a'^2b'^2(a^2 - b^2)}{a'^2b'^2} = 0.$$

Les coordonnées du centre sont

$$x_0 = \frac{a^2x'}{a'^2}, \quad y_0 = -\frac{b^2y'}{b'^2}.$$

Ces valeurs, substituées dans la polaire du point P relativement à l'ellipse, donnent l'identité

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Il reste donc à prouver que cette polaire est perpendiculaire sur PP'. Or, les droites PH, PK, la tangente au cercle ou à l'hyperbole en P et la perpendiculaire sur la polaire de P forment un faisceau harmonique, car les équations de ces quatre droites sont respectivement

$$y - y' = \frac{ab'}{a'b}(x - x'),$$

$$y - y' = -\frac{ab'}{a'b}(x - x'),$$

$$y - y' = \frac{b'^2x'}{a'^2y'}(x - x'),$$

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x').$$

Le théorème est donc démontré.

Quand le point P se déplace sur l'hyperbole, le centre du cercle PHK décrit l'hyperbole

$$\frac{a'^2 x^2}{a^2} - \frac{b'^2 y^2}{b^2} = 1,$$

et la droite HK enveloppe l'hyperbole représentée par

$$C^4(a'^2 y^2 - b'^2 x^2) = a'^2 b'^2 (a^2 + b^2)^2.$$

Questions 915 *et* 916

(voir 2e série, t. VIII, p. 48 et 95);

Par M. E. KRUSCHWITZ,

Membre de la Société des Étudiants en Mathématiques.

915. *Étant donné un polygone* $A_1 A_2 \ldots A_n$, *déterminer la position d'un point* $A_0(x_0, y_0)$ *dont les coordonnées satisfont aux équations*

$$y_0 - n y_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} y_2 - \ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} \mp n y_{n-1} \pm y_n = 0,$$

$$x_0 - n x_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} x_2 - \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \mp n x_{n-1} \pm x_n = 0.$$

Démontrer, par le calcul et la géométrie, que la position de ce point est indépendante du choix des axes de coordonnées. (A. Sartiaux.)

1. Quand nous transformons les axes de coordonnées d'une manière quelconque, les nouvelles coordonnées s'obtiennent par des équations de cette forme

$$x' = px + qy + \alpha, \quad y' = rx + sy + \beta.$$

Après la transformation, les équations données deviennent

$$y'_0 - n y'_1 + \ldots \mp n y'_{n-1} \pm y'_n = 0,$$

$$x'_0 - n x'_1 + \ldots \mp n x'_{n-1} \pm x'_n = 0.$$

Si la position du point déterminé par x'_0, y'_0 doit être la même que celle du point (x_0, y_0), il faut que les dernières équations soient satisfaites par les valeurs de x' et y' mentionnées ci-dessus. En les introduisant, nous obtenons

$$rx_0 + sy_0 + \beta - n(rx_1 + sy_1 + \beta) + \ldots$$
$$\mp n(rx_{n-1} + sy_{n-1} + \beta) \pm (rx_n + sy_n + \beta) = 0,$$

et

$$px_0 + qy_0 + \alpha - n(px_1 + qy_1 + \alpha) + \ldots \pm (px_n + qy_n + \alpha) = 0;$$

ou

$$r\left[x_0 - nx_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}x_2 - \ldots \mp nx_{n-1} \pm x_n\right]$$
$$+ s\left[y_0 - ny_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}y_2 - \ldots \mp ny_{n-1} \pm y_n\right]$$
$$+ \beta\left[1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \mp n \pm 1\right] = 0.$$

et

$$p(x_0 - nx_1 + \ldots \pm x_n) + q(y_0 - ny_1 + \ldots \pm y_n)$$
$$+ \alpha\left[1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} \ldots \mp n \pm 1\right] = 0.$$

Pour que, dans ces deux dernières équations, les premiers membres égalent zéro, il suffit, d'après les équations données, de démontrer que

$$\left[1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \mp n \pm 1\right] = 0.$$

Quand nous posons $x = -1$ dans la formule du binôme

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^n,$$

nous obtenons

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \pm n \mp 1$$

Par conséquent aussi, les premiers membres de nos équations égalent zéro. C. Q. F. D.

2. Nous avons deux systèmes de coordonnées quelconques, et nous déterminons d'abord les points M_1 et M'_1 correspondant aux coordonnées nx_1, ny_1 dans les deux systèmes. La droite $M_1M'_1$ sera parallèle à OO', et si $OO' = t$, elle sera égale à $t(-1+n)$. Continuons, en déterminant les points M_2 et M'_2 correspondant aux coordonnées $nx_1 - \frac{n(n-1)}{1.2}x_2$, $ny_1 - \frac{n(n-1)}{1.2}y_2$, dans les deux systèmes, la droite $M_2M'_2$ sera encore parallèle à OO' et égale à

$$\left[-1+n-\frac{n(n-1)}{1.2}\right]t,$$

et ainsi de suite. La droite $M_nM'_n$ sera égale à

$$\left[-1+n-\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots\pm n\mp 1\right]t,$$

c'est-à-dire $=0$, comme nous l'avons démontré plus haut.

Puisque la distance de M_n et M'_n, dont les coordonnées sont

$$x_n = nx_1 - \frac{n(n-1)}{1.2}x_2 + \ldots \pm nx_{n-1} \mp x_n,$$

$$y_n = ny_1 - \frac{n(n-1)}{1.2}y_2 + \ldots \pm ny_{n-1} \mp y_n,$$

égale zéro, les points coïncident. C. Q. F. D.

916. *Trouver l'enveloppe des ellipses concentriques à aire constante dont les axes ont la même direction.*

(C. Harkema.)

L'équation de l'ellipse est

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

où

$$ab\pi = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad ab = \text{P}.$$

En éliminant b, nous avons

$$\text{P}^2x^2 + a^4y^2 - a^2\text{P}^2 = 0.$$

Pour trouver l'enveloppe, nous différentions l'équation par rapport à a, et nous éliminons a entre les deux équations. Il en résnlte

$$2a^2y^2 - \text{P}^2 = 0;$$

d'où

$$a^2 = \frac{\text{P}^2}{2y^2}.$$

Donc

$$\text{P}^2x^2 + \frac{\text{P}^4}{4y^2} - \frac{\text{P}^4}{2y^2} = 0,$$

$$x^2y^2 = \frac{\text{P}^2}{4}.$$

La courbe est composée de deux hyperboles équilatères, dont les axes de coordonnées sont les asymptotes.

Question 922

(voir 2e série, t. VIII, p. 96);

PAR M. SCHLEGEL.
Étudiant en mathématiques à Berlin.

Un ellipsoïde donné tourne autour d'un point fixe donné sur l'un de ses axes de symétrie, trouver le lieu des pôles d'un plan fixe donné, par rapport aux diverses positions de l'ellipsoïde. (LAFONT.)

La solution de la question proposée ne devient pas plus difficile, si l'on suppose que le point fixe donné soit situé comme on voudra. Il est évident qu'on peut prendre l'ellipsoïde fixe et faire tourner le plan en restant toujours à la même distance du point donné. Soit l'équation de l'ellipsoïde

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Alors le plan polaire du point (ξ, η, ζ) aura pour équation

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} = 1.$$

La distance constante p de ce plan au point fixe (x_1, y_1, z_1) sera donc

$$p = \frac{\frac{x_1\xi}{a^2} + \frac{y_1\eta}{b^2} + \frac{z_1\zeta}{c^2} - 1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}.$$

Le lieu cherché sera donc une surface du second ordre, dont l'équation sera

$$(2) \qquad p^2\left(\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}\right) = \left(\frac{x_1\xi}{a^2} + \frac{y_1\eta}{b^2} + \frac{z_1\zeta}{c^2} - 1\right)^2.$$

En égalant à zéro deux des trois données x_1, y_1, z_1, on aura la solution de la question proposée.

En prenant le centre pour le point (x_1, y_1, z_1), l'équation de la surface sera

$$p^2\left(\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}\right) = 1.$$

La courbe d'intersection de cet ellipsoïde et de l'ellipsoïde (1) joue un rôle important dans la mécanique. (*Voir* Poinsot, *Sur la rotation d'un corps.*)

Question 939

(voir 2e série, t. VIII, p. 275);

PAR M. FOURET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Étant donné un contour polygonal formé de $2n$ *côtés inscrit dans une conique, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la conique sur les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées du même point sur tous les côtés de rang impair.* (CHASLES.)

Soient $A_1 A_2 \ldots A_{2n-1} A_{2n}$ un polygone inscrit dans une conique; O et M, deux points pris arbitrairement sur cette courbe, le premier fixe, le second mobile.

A_{2p-1}, A_{2p}, A_{2p+1} étant trois sommets consécutifs du polygone, on a (CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 3) :

$$\frac{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}}}{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}}} : \frac{\sin \widehat{OMA_{2p-1}}}{\sin \widehat{OMA_{2p+1}}} = \text{const.}$$

Désignons par Π_1^n le produit des n rapports anharmoniques obtenus, en faisant successivement dans le précédent p égal à $1, 2, \ldots, n$, et en observant que A_{2p+1} n'est autre chose que A_1,

$$\Pi_1^n \left(\frac{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}}}{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}}} : \frac{\sin \widehat{OMA_{2p-1}}}{\sin \widehat{OMA_{2p+1}}} \right) = K,$$

K étant une constante :

Ou, plus simplement,

$$\Pi_1^n \left(\frac{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}}}{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}}} \right) = K,$$

ou bien encore

$$(1)\qquad \frac{\Pi_1^n\left(\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}}\right)}{\Pi_1^n\left(\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}}\right)} = K.$$

Cette égalité exprime un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Étant donné un contour polygonal formé de 2n côtés inscrit dans une conique, le produit des sinus des angles sous lesquels on voit d'un point quelconque de la conique tous les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des sinus des angles sous lesquels on voit du même point les côtés de rang impair.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(2)\qquad \frac{\Pi_1^n\left(MA_{2p} \times MA_{2p-1} \sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}}\right)}{\Pi_1^n\left(MA_{2p} \times MA_{2p+1} \sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}}\right)} = K.$$

Or, MQ_{2p}, MQ_{2p+1} désignant les distances du point M aux droites $A_{2p}A_{2p-1}$, $A_{2p}A_{2p+1}$, on a

$$MA_{2p} \times MA_{2p-1} \sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}} = A_{2p} A_{2p-1} \times MQ_{2p},$$

car les deux membres de cette égalité sont deux expressions différentes de l'aire du triangle $A_{2p}MA_{2p-1}$.

Pour la même raison

$$MA_{2p} \times MA_{2p+1} \sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}} = A_{2p} A_{2p+1} \times MQ_{2p+1}.$$

En ayant égard à ces relations, l'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{\Pi_1^n(MQ_{2p})}{\Pi_1^n(MQ_{2p+1})} = \text{const}.$$

C'est l'expression du théorème que nous nous proposions de démontrer.

Remarque. — Ce théorème n'est que la généralisation du théorème de Pappus relatif au quadrilatère inscrit dans une conique (Chasles, *Traité des coniques*, p. 16). On peut en déduire une généralisation du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit.

Imaginons un polygone de $2n$ côtés inscrit dans une conique, et désignons par

$$(3)\qquad A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0, \ldots$$

les équations de n côtés non consécutifs, par

$$(4)\qquad P = 0,\quad Q = 0,\quad R = 0, \ldots$$

les équations des n autres.

L'équation

$$(5)\qquad ABC\ldots + \lambda PQR\ldots = 0$$

représente une courbe d'ordre n passant par les n^2 points d'intersection des droites (3) par les droites (4); elle exprime d'ailleurs que le produit des distances d'un point quelconque de cette courbe aux droites (3) est dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux droites (4). Or les points de la conique, d'après le théorème que nous avons démontré précédemment, jouissent de la même propriété; la conique, pour une valeur convenable de λ, fait donc partie de la courbe (5). La partie complémentaire est une courbe d'ordre $n - 2$, contenant les $n(n - 2)$ points d'intersection des droites (4) par les droites (5), sans comprendre parmi ces points les sommets du polygone.

Comme d'ailleurs $n(n - 2)$ est supérieur au nombre des conditions qui déterminent une courbe d'ordre $(n - 2)$, le résultat auquel nous sommes arrivés constitue un théorème qui peut s'énoncer ainsi :

Étant donné un polygone fermé de $2n$ côtés inscrit dans une conique, les points d'intersection des côtés de

rang pair avec les côtés de rang impair non contigus sont situés sur une même courbe d'ordre $n-2$.

Dans le cas de $n=3$, qui est le plus simple, on retrouve le théorème de Pascal.

Question 939

(voir 2e série, t. VIII, p. 275);

Par M. WILLIÈRE.

Étant donné un contour polygonal fermé de $2n$ côtés inscrit dans une conique, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la conique sur les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées du même point sur tous les côtés de rang impair. (Chasles.)

On peut toujours décomposer le polygone en $n-1$ quadrilatères, les quadrilatères extrêmes ayant trois côtés du contour polygonal, et les quadrilatères moyens deux seulement. Cela étant, soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}$$

les perpendiculaires abaissées d'un point de la conique sur les côtés du polygone, et

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{n-2}$$

les perpendiculaires abaissées sur les $n-2$ diagonales. On aura dans chacun des quadrilatères

$$\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2\delta_1} = \text{const.},$$

$$\frac{\delta_1\delta_2}{\alpha_4\alpha_{2n}} = \text{const.},$$

$$\frac{\alpha_5\alpha_{2n-1}}{\delta_2\delta_3} = \text{const.},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n+3}}{\alpha_{n+2}\delta_{n-2}} = \text{const.}$$

Donc on en déduira toujours, quel que soit n,

$$\frac{x_1 x_3 \ldots x_{2n-1}}{x_2 x_4 \ldots x_{2n}} = \text{const.}$$

Question 943

(voir 2e série, t. VIII, p. 276);

PAR M. LÉON GEOFFROY,

Ingénieur, Professeur de Mathématiques.

Une courbe plane, c, roule sur une courbe fixe C, *située dans le même plan, en entraînant un point mobile qui décrit alors une courbe b. A un instant donné, les deux courbes se touchent en* A, *et, le point mobile étant en* M, *la courbe c s'arrête brusquement, et la courbe* C *commence au contraire à rouler sur la première en entraînant le point* M *suivant une courbe* B. *Démontrer que les centres de courbure des deux courbes b et* B, *au point commun* M, *divisent harmoniquement la longueur* MA.

(LAISANT.)

Si l'on désigne par R le rayon de courbure de la courbe fixe C et par R′ celui de la courbe mobile c au point A; par n la longueur MA, par ρ le rayon de courbure de la courbe b au point M, on a, d'après Savary,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{n}\right),$$

φ étant l'angle que fait la normale en M à la courbe b avec la normale en A aux courbes c et C.

Quand la courbe c devient fixe et C mobile, la courbe B décrite par le point M a pour rayon de courbure ρ_1, et la formule ci-dessus devient, en tenant compte des changements de signe,

$$-\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{\rho_1 - n} + \frac{1}{n}\right).$$

ou bien

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{n-\rho_1} - \frac{1}{n}\right).$$

Soient X le centre de courbure de b, et X′ le centre de courbure de B (*).

Des deux relations écrites, on déduit l'égalité

$$\frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n-\rho_1} - \frac{1}{n},$$

ou bien

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{MA} = \frac{1}{X'A} - \frac{1}{MA};$$

d'où

$$\frac{1}{AX} + \frac{2}{MA} = \frac{1}{X'A},$$

$$MA.X'A + 2AX.X'A. = AX.MA,$$

$$X'A(MA + AX) + AX(X'A - MA) = 0,$$

$$X'A.MX + AX(-MX') = 0,$$

ou

$$X'A.MX + AX.X'M = 0,$$

$$\frac{X'A}{X'M} = -\frac{AX}{MX} = -\frac{XA}{XM},$$

ou, sous la forme ordinaire,

$$\frac{X'A}{X'M} : \frac{XA}{XM} = -1$$

Question 895

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. [illegible]).

PAR M. FARINEAU,

Élève au lycée de Lille.

Trouver le lieu du centre d'une ellipse d'aire constante circonscrite à un triangle. (SYLVESTER.)

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Je prends pour origine un des sommets, O, du triangle; pour axes de coordonnées les deux côtés adjacents. Soient 2α, 2β leurs longueurs; θ l'angle des axes.

L'équation de l'ellipse sera

$$x(x-2\alpha)+Cy(y-2\beta)+2Bxy=0;$$

elle renferme deux paramètres B et C.

Or l'aire de l'ellipse

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

est

$$E=\frac{\Pi\Delta\sin\theta}{(ac-b^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \Delta=acf+2ebd-ae^2-cd^2-fb^2;$$

l'aire de l'ellipse proposée sera donc

$$E=\frac{\pi C(2B\alpha\beta-c\beta^2-\alpha^2)\sin\theta}{(C-B^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit a le rayon du cercle dont la surface est E, on aura

$$(1)\qquad \frac{a^2}{\sin\theta}=\frac{C(2B\alpha\beta-C\beta^2-\alpha^2)}{(C-B^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les coordonnées du centre de l'ellipse sont données par les équations

$$f'_x=0$$

ou

$$(2)\qquad x-\alpha+By=0,$$

$$f'_y=0$$

ou

$$(3)\qquad C(y-\beta)+Bx=0.$$

On aura l'équation du lieu en éliminant B et C entre (1), (2) et (3). Je résous (2) et (3), par rapport à B et

C, ce qui donne

$$B = \frac{\alpha - x}{y}, \quad C = \frac{x(\alpha - x)}{y(\beta - y)}.$$

Je substitue dans (1), ce qui donne

$$\frac{a^4}{\sin^2\theta}\left[\frac{x(\alpha - x)}{y(\beta - y)} - \frac{(\alpha - x)^2}{y^2}\right]$$
$$= \frac{x^2(\alpha - x)^2}{y^2(\beta - y)^2}\left[\frac{2\alpha\beta(\alpha - x)}{y} - \frac{\beta^2 x(\alpha - x)}{y(\beta - y)} - \alpha^2\right]^2,$$

équation qui donne

$$\left.\begin{aligned}(\alpha - x)^2 &= 0,\\ (\beta - y)^2 &= 0,\\ (\alpha y + \beta x - \alpha\beta)^2 &= 0,\end{aligned}\right\}$$ équations des droites qui joignent les milieux des côtés des triangles;

et

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}&x^2 y^2(\alpha y + \beta x - 2\alpha\beta)^2 \sin^2\theta\\ &\quad - a^4(\alpha - x)(\beta - y)(\alpha y + \beta x - \alpha\beta) = 0.\end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation du lieu; elle est du sixième degré.

Si l'on fait $x = \alpha$, on trouve

$$y^2 = 0 \quad \text{et} \quad (y - \beta)^2 = 0,$$

c'est-à-dire que les milieux des côtés du triangle sont trois points doubles.

On voit sur l'équation (A) que les directions asymptotiques sont parallèles aux trois côtés du triangle. Je cherche l'ordonnée à l'origine α de l'asymptote parallèle à la droite

$$\alpha y + \beta x = 0;$$

je trouve

$$(\alpha - \beta)^2 = 0.$$

C'est une des droites qui joignent les milieux des côtés du triangle; de même les deux autres sont des asymptotes.

Je dis que les branches infinies correspondant à ces asymptotes sont imaginaires.

Je désigne par a, b, o les milieux des côtés du triangle OAB, et je considère les droites $CabC'$, $EoaE'$, $DobD'$ (*). Je remarque qu'il n'y a pas de points du lieu dans la partie $EobC'$. En effet, pour un point de cette portion, on a $x - \alpha > 0$, $y - \beta < 0$, et

$$\alpha y + \beta x - \alpha\beta > 0;$$

donc l'équation du lieu est impossible. On verrait de même que les portions $DoaC$ et $E'abD'$ ne renferment pas non plus de points du lieu, et la courbe ne peut être située que dans le triangle aob et dans les angles DoE, CaE' et $D'bC'$.

Cela posé, si la droite ab était asymptote, les deux branches infinies devraient être du même côté de cette droite; mais alors ab rencontrerait la courbe en trois points à l'infini, plus en quatre points, deux en a, deux en b, ce qui fait sept; et cela est impossible, car l'équation est du sixième degré. Ainsi la courbe n'a pas de branches infinies.

Cela posé, je cherche les tangentes au point o; je transporte l'origine en ce point. L'équation devient

$$(x+\alpha)^2(y+\beta)^2(\alpha y+\beta x)^2\sin^2\theta - a^4 xy(\alpha y+\beta x+\alpha\beta) = 0;$$

les tangentes à l'origine sont représentées par l'équation

$$\alpha\beta\sin^2\theta(\alpha y+\beta x)^2 - a^4 xy = 0.$$

Ces tangentes seront réelles si on a

$$a^2 > 2\alpha\beta\sin\theta.$$

$2\alpha\beta\sin\theta$ est la surface du triangle donné, a^2 celle du

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

carré qui a pour côté le rayon du cercle dont la surface est égale à celle de l'ellipse, et cette condition exprime que la surface de ce carré est supérieure à celle du triangle. La courbe aura donc, dans ce cas, la forme indiquée.



Je suppose que les tangentes soient confondues, c'est-à-dire que

$$a^2 = 2\alpha\beta \sin\theta.$$

Alors les points o, a, b sont des points de rebroussement; les trois feuilles de la courbe précédente disparaissent, et la courbe est tout entière dans le triangle aob. La droite avec laquelle se confondent les tangentes en o est

$$-\alpha y + \beta x = 0.$$

C'est la droite $\mathrm{O}o$. De même $\mathrm{A}a$, $\mathrm{B}b$ sont les tangentes aux points a et b.

Si maintenant a^2 devient $< 2\alpha\beta \sin\theta$, les points a, o, b sont alors des points isolés. Je cherche l'intersection de la courbe avec la droite $\mathrm{O}o$, pour voir comment elle est située.

Je fais $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ dans l'équation (A), et il vient, en faisant abstraction du facteur $(x - \alpha)^2 = 0$,

$$f(x) = 4\beta^2 \sin^2\theta x^4 - 2a^4\alpha x + a^4\alpha^2 = 0.$$

Cette équation a deux racines positives, ou ses quatre racines sont imaginaires.

Si $a^2 > 2\alpha\beta \sin\theta$, ses deux racines réelles sont com-

prises, l'une entre $\frac{\alpha}{2}$ et α, l'autre est supérieure à α. Si $a^2 = 2\alpha\beta\sin\theta$, la racine supérieure devient égale à α : c'est le cas précédent; l'autre racine est toujours comprise entre $\frac{\alpha}{2}$ et α. Soit γ la racine de la dérivée

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{a\alpha}{\beta^2\sin^2\theta}},$$

l'équation $f(x) = 0$ aura des racines réelles si

$$f(\gamma) < 0 \quad \text{ou} \quad a^4 > \frac{64}{27}\alpha^2\beta^2\sin^2\theta.$$

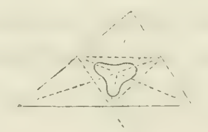
On voit que cette condition a lieu quand

$$a^4 > 4\alpha^2\beta^2\sin^2\theta,$$

c'est-à-dire pour le premier cas examiné; de même pour

$$a^4 = 4\alpha^2\beta^2\sin^2\theta.$$

Si $a^4 < 4\alpha^2\beta^2\sin^2\theta$, la condition précédente peut être encore satisfaite. Alors la courbe aura la forme ci-contre :



Enfin, si $a^4 = \frac{64}{27}\alpha^2\beta^2\sin^2\theta$, la courbe se réduit à un point

$$x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{a\alpha}{\beta^2\sin^2\theta}};$$

a diminuant à partir de cette valeur, le lieu est imagi-

naire. Ainsi la valeur minimum de a est telle que

$$a^2 = \frac{8}{3\sqrt{3}}\alpha\beta \sin\theta.$$

Donc l'ellipse de surface minimum circonscrite au triangle OAB a pour surface

$$\frac{8\pi\alpha\beta\sin\theta}{3\sqrt{3}}.$$

Sur les questions 894 *et* 961

(p. 312 et 328).

Par M. LE BESGUE.

La question 894 généralisée est celle-ci : Couper un prisme droit de base donnée, de manière que la section soit un triangle de côtés αx, βx, γx semblable au triangle de côtés α, β, γ. La base du prisme étant un triangle de côtés a, b, c, on suppose que a, b, c sont respectivement les projections de αx, βx, γx. L'équation est

$$(1) \qquad \sqrt{\alpha^2 x^2 - a^2} + \sqrt{\beta^2 x^2 - b^2} + \sqrt{\gamma^2 x^2 - c^2} = 0,$$

en déterminant convenablement les signes des radicaux.

Cette équation en x est biquadratique, on connaît la construction de ses racines.

La question 894 suppose $\alpha x = \beta x = \gamma x = y$, y étant une ligne.

Si l'on met l'équation (1) sous la forme

$$\sqrt{\alpha^2 - \frac{a^2}{x^2}} + \sqrt{\beta^2 - \frac{b^2}{x^2}} + \sqrt{\gamma^2 - \frac{c^2}{x^2}},$$

et si l'on fait

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{x^2} = \frac{c^2}{x^2} = y^2,$$

le triangle dont les côtés sont α, β, γ se projettera suivant un triangle équilatéral de côté y.

Les équations

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - b^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = 0,$$
$$\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{b^2 - y^2} + \sqrt{c^2 - y^2} = 0$$

(en changeant α, β, γ en a, b, c), se réduisent à la même équation

$$3y^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)y^2 + 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0,$$

ou

$$(3y^2 - a^2 - b^2 - c^2)^2 = \mathrm{R},$$

$$(a)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R} &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 3(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 12.a^2b^2 \\ &= 2(a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 - c^2)^2 + 2(b^2 - c^2)^2. \end{aligned} \right.$$

Mais, comme $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C}$, on a aussi

$$(b)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R} &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 12a^2b^2\sin^2 \mathrm{C} \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}.ab\sin \mathrm{C}) \\ &\quad \times (a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{3}.ab\sin \mathrm{C}). \end{aligned} \right.$$

Pour le premier problème, on devra prendre

$$3y^2 - a^2 - b^2 - c^2 = \sqrt{\mathrm{R}},$$

et pour le second

$$3y^2 - a^2 - b^2 - c^2 = -\sqrt{\mathrm{R}}.$$

En partant de la forme (b) de R, et posant

$$6\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}\,ab\sin \mathrm{C},$$
$$6\rho'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{3}\,ab\sin \mathrm{C},$$

on aura

$$y^2 = (\rho \pm \rho')^2, \quad y = (\rho \pm \rho'),$$

puisque l'on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(\rho^2 + \rho'^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{\mathrm{R}} = 6\rho\rho'.$$

D'ailleurs, en vertu des égalités

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

on a encore

$$\rho^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cos(C + 60^\circ),$$

$$\rho'^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cos(C - 60^\circ);$$

et comme le rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a}{\sqrt{3}}$, on voit que ρ et ρ' ne sont autres que les droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ de l'énoncé de la question 961.

On peut demander la construction géométrique du problème plus général, posé plus haut.

Note. — M. H. Brocard, lieutenant du Génie, et M. Jouanne, professeur au lycée de Caen, ont de même résolu, par le calcul, les questions 894 et 961.

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une lettre de M. Laisant* (en date du 20 octobre).

« En parcourant le *Calcul différentiel* de M. *Bertrand*
» (p. 228), j'y vois tout au long la démonstration de la
» formule que j'ai proposé de démontrer, dans la ques-
» tion 951. Je regrette d'avoir mis mon nom au-dessous
» d'un énoncé qui ne m'appartient pas; mais je n'ai
» péché que par ignorance, et vous m'obligerez beau-
» coup en portant cette rectification à la connaissance
» de vos lecteurs. Cela ne les empêchera pas de cher-
» cher, s'ils ne la connaissent pas, la solution d'une

» question vraiment intéressante, et que je crois peu » répandue. »

La première démonstration de la formule dont il s'agit dans la question 951 appartient à *Euler*; et de cette formule il a déduit celle de la question 952 (p. 336). M. *Realis*, par une déduction inverse, établit la formule (951), au moyen de la formule (952). Nous ferons très-prochainement connaître les démonstrations de M. Realis et de M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

2. M. *Dostor* nous communique le renseignement suivant :

« Le théorème sur le cercle (question 957, p. 479) attribué à *Euler*, appartient à *Fermat*. Voici ce que Euler dit à ce sujet dans les *Variæ demonstrationes geometricæ, Novi Commentarii Acad. Scient. Imp. Petrop.*, t. I, p. 49.

« Reperitur in commercio epistolico FERMATII propo» sitio geometrica, quam geometris demonstrandam pro» posuit, quæ etsi ad naturam circuli spectat, nihilque » difficultatis primo intuitu involvere videtur, tamen a » pluribus geometris frustrà est suscepta, neque usque » adhuc ejus demonstratio est tradita. »

3. Nous avons reçu de M. *Vallès* une réponse aux observations de M. *Catalan* (numéro d'octobre, p. 456); cette réponse paraîtra dans le numéro de janvier.

4. M. W. A. *Whitworth*, M. A. Fellow of Saint-John's college Cambridge, nous informe que, dans *the Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, se trouve, à la page 138, la suite de son article sur les propriétés de la *spirale équiangle*, dont une traduction a été insérée dans les *Nouvelles Annales* (p. 5, numéro

de janvier 1869). Nous espérons que le traducteur du premier article voudra bien nous donner la traduction du second.

5. L'impossibilité de résoudre en nombres entiers les équations (A) $x^2 + y^2 = (4a + 3)z$, et (B) $x^2 = y^3 + 7$ (p. 453) est une conséquence toute simple de cette proposition que : *tout diviseur de la somme des carrés de deux nombres premiers entre eux est*, également, *la somme de deux carrés premiers entre eux*. Mais M. Le Besgue déduit l'impossibilité de l'équation $x^2 = y^3 + 7$ de celle de diviser $x^2 + y^2$, où x et y sont premiers entre eux, par un nombre premier de la forme $(4a + 3)$ (p. 453), comme il l'a fait dans le n° 50 de ses *Exercices d'Analyse numérique*. M. Le Besgue, partageant l'opinion que nous avons émise (p. 455) sur une démonstration de Legendre, se propose de modifier le n° 61 de ses *Exercices d'Analyse numérique*, où il a donné des démonstrations qui lui semblent, de même, incomplètes.

6. M. *Agasse*, Professeur au lycée de Lorient, et M. *Aouit*, élève au collége de Blaye, nous ont adressé des solutions très-exactes de la question proposée au Concours d'agrégation, *Mathém. élément.* (année 1869) et dont voici l'énoncé :

Par trois points a, b, c en ligne droite, on mène un premier système de trois droites A_1, B_2, C_3, qui se coupent en des points m, n, p; puis, un second système de trois droites A_4, B_5, C_6, se coupant en des points m', n', p'; démontrer que les droites mm', nn', pp' se rencontrent en un même point.

Il est évident que cette proposition revient à la suivante :

Lorsque les côtés de deux triangles mnp, $m'n'p'$ se coupent, deux à deux, en des points a, b, c, situés en

ligne droite, leurs sommets sont, deux à deux, situés sur des droites mm', nn', pp', concourantes au même point.

Or ce dernier théorème, attribué à *Desargues*, est depuis longtemps connu et démontré. Les triangles mnp, $m'n'p'$, dont les côtés satisfont à la condition énoncée, sont dits *homologiques;* la droite abc est l'axe de l'*homologie*, et le point de concours des droites mm', nn', pp' en est le centre. (G.)

QUESTIONS.

963. 1° Écrire les n premiers nombres entiers 1, 2, 3, ..., n, sur une même ligne, de telle sorte que la différence entre deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à celle de leurs rangs sur cette ligne;

2° Combien le problème admet-il de solutions?

Sur un échiquier composé de n^2 cases, placer n reines de manière qu'aucune d'elles ne soit en prise par l'une des $(n-1)$ autres est la même question posée en d'autres termes. (LIONNET.)

964. Par un point M d'une ellipse, on peut mener trois normales à la courbe, indépendamment de celle qui a son pied en M. Sur chacune de ces normales, on porte, à partir du point M, une longueur égale au segment intercepté entre le grand axe et l'ellipse, les trois points ainsi obtenus sont situés sur un cercle qui touche l'ellipse au point M. (LAGUERRE.)

965. Étant donnés deux points fixes A et B situés sur une ellipse; si l'on joint un point quelconque M de cette courbe aux deux point fixes, les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes MA et MB interceptent sur chacun des axes un segment dont la longueur est constante, quelle que soit la position du point sur la courbe. (LAGUERRE.)

966. Si l'on désigne par C_m^p le nombre des combinaisons sans répétition de m objets p à p, en regardant C_m^0 comme égal à l'unité, on a l'identité suivante

$$C_k^0 C_{n+1}^{2k+1} + C_{k+1}^1 C_{n+1}^{2k+3} + C_{k+2}^2 C_{n+1}^{2k+5} + \ldots = 2^{n-2k} C_{n-k}^k.$$

(Désiré André).

967. Théorème. a étant un nombre entier positif quelconque, si l'on désigne par S_n la somme des résultats que fournit l'expression

$$[t_1(a-1)][t_2(a-1)-1][t_3(a-1)-2]\ldots[t_n(a-1)-(n-1)]$$

lorsqu'on y remplace $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ par tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à p, avec cette restriction que l'on ait toujours

$$t_{k+1} \geq t_k$$

et

$$t_k(a-1) > k-1,$$

alors on a l'identité suivante

$$\frac{S_1}{p+1} + \frac{S_2}{(p+1)(p+2)} + \frac{S_3}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots$$
$$+ \frac{S_{(a-1)p}}{(p+1)(p+2)\ldots(ap)} = \left(\frac{2^a-1}{a}\right)^p - 1.$$

(Désiré André.)

968. Si l'on désigne par n un nombre entier positif, et par D_n la différence des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation $x^2+px+q=0$, on aura, à partir de $n=2$,

$$D_n = (-1)^{n-1}\left[p^{n-1} - \frac{n-2}{1}p^{n-3}q\right.$$
$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}p^{n-5}q^2$$
$$\left. - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}p^{n-7}q^3 + \ldots\right] \times D_1;$$

le développement s'arrête, pour une valeur particulière de n au dernier terme qui ne s'évanouit pas.

(G.-P.-W. Baehr.)

969. Déduire de la formule précédente la relation

$$n = 2^{n-1} - \frac{n-2}{1} 2^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} 2^{n-5}$$
$$- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} 2^{n-7} + \ldots$$

(G.-P.-W. Baehr.)

970. Étant donnée une ellipse, on lui circonscrit un triangle dont les hauteurs passent par les points de contact des côtés correspondants. Trouver le lieu des sommets de ce triangle. (F. V.)

971. Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

(H. Brocard.)

972. Reconnaître les différentes surfaces représentées par l'équation

$$a \frac{y+z}{x} + b \frac{x+z}{y} + 1 = 0,$$

quand a et b prennent toutes les valeurs possibles.

Trouver le lieu des centres de ces diverses surfaces.

Indiquer les particularités relatives aux axes des coordonnées aux sections planes.

Peut-il y avoir des sections circulaires?

Les surfaces en question peuvent-elles être de révolution?

Montrer que leur enveloppe est une surface du second ordre, lorsque le produit ab reste constant.

(H. Brocard.)

973. Une parabole se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe en un point déterminé. On de-

mande : 1° le lieu du foyer ; 2° le lieu du point de la courbe où la tangente est perpendiculaire à la droite fixe : 3° l'enveloppe de l'axe de la parabole.

(H. Brocard.)

974. On donne une courbe gauche résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré ayant mêmes plans de symétrie ; par deux points pris sur cette courbe on mène les plans normaux. Les milieux des trois segments, interceptés sur chacun des axes de symétrie entre les deux plans normaux et le point milieu de la corde qui joint les deux points de la courbe, sont dans un même plan, et ce plan est perpendiculaire à la corde.

(Laguerre.)

975. Étant donnés une surface du second ordre et un plan quelconque, trouver sur cette surface un réseau de courbes conjuguées (c'est-à-dire telles, que les tangentes à ces courbes en un point soient conjuguées relativement à l'indicatrice) se projetant sur le plan suivant un réseau orthogonal. (Ribeaucour.)

976. Étant donnés sur un plan deux cercles et un point, mener par le point une sécante telle, que ses parties intérieures aux deux cercles soient entre elles dans un rapport donné. (Construction géométrique de la sécante.)

977. On donne une parabole et un point intérieur à cette courbe ; faire passer par le point donné une circonférence doublement tangente à la parabole. (Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME VIII, 2e SÉRIE.)

Arithmétique et Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie à deux dimensions.

Pages.

Géométrie à trois dimensions.

Calcul infinitésimal.

Bulletin bibliographique.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME VIII, 2e SÉRIE.)

Pages.

ERRATA.

TOME VIII (2e SÉRIE.)

Page 32, ligne 17, *au lieu de* M. Montcoq, *lisez* M. Daligault, professeur.

Page 48, ligne 18, *au lieu de* Le Besgue, *lisez* Gauss.

Page 191, ligne 16, *au lieu de* page 336, *lisez* 236.

Page 316, *au lieu de* mq, *lisez* $m.q$.

Page 407, ligne 3 en remontant, *au lieu de* va paraître, *lisez* a paru au commencement de 1868.

Page 407, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $E\left(\frac{n}{q}\right)^2$, *lisez* $E\left(\frac{n}{q}\right)$.

Page 408, ligne 6, *au lieu de* $N_{n-1-(a-1)r,q-1}$, *lisez* $N_{n-1-(a-1)q,q-1}$.

Page 409, ligne 1 en remontant, *au lieu de* $\frac{n^3-1}{12}$, *lisez* $\frac{n^2-1}{12}$.

Page 476, ligne 6, *au lieu de* 240, *lisez* 440.

NOTE ADDITIONNELLE

AUX TABLES DU TOME VII, 2e SÉRIE.

1° TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

Arithmétique et Algèbre.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Mélanges.

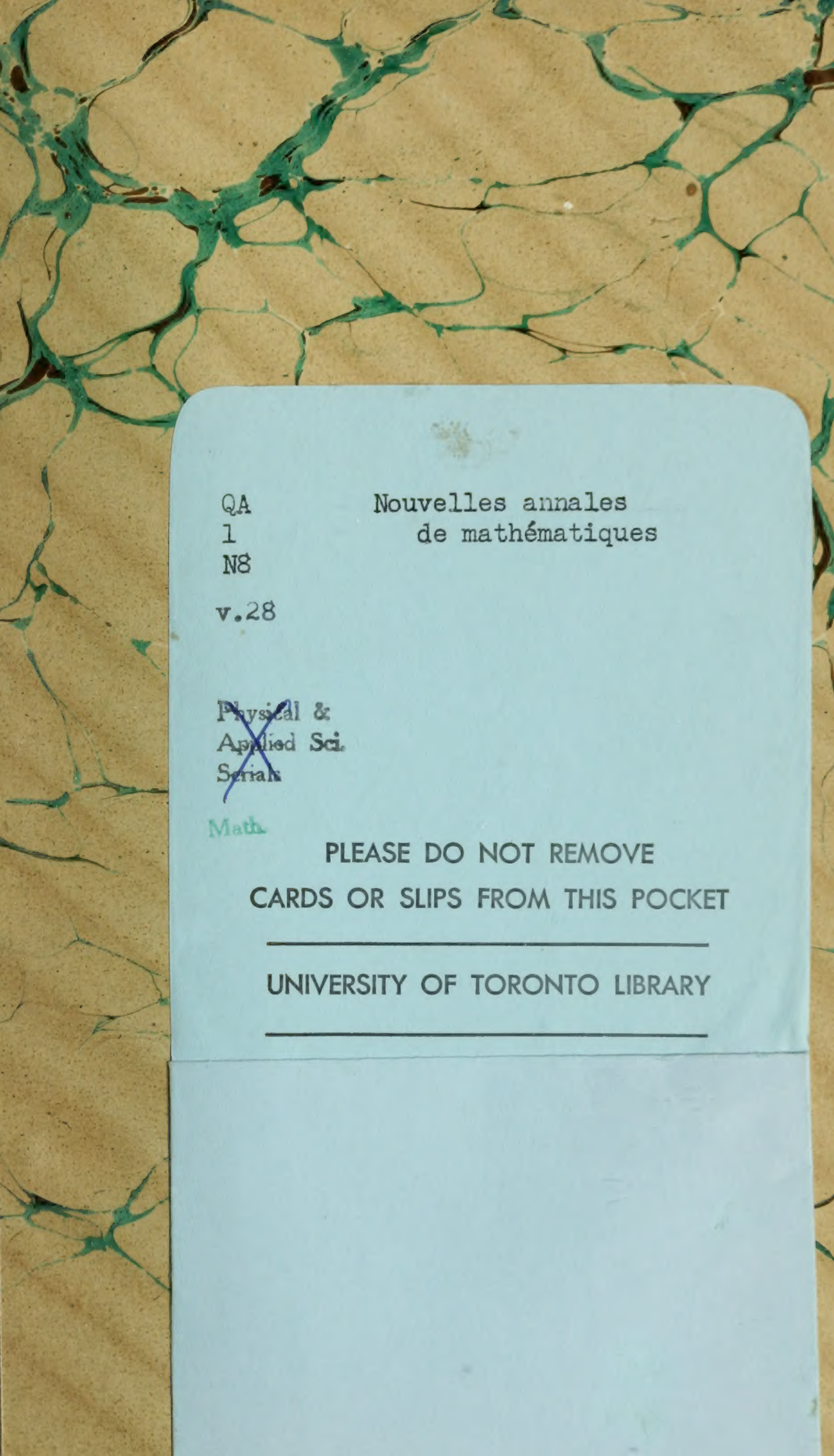
Questions proposées.

Questions résolues.

2° TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.





QA
1
N8
v.28
Nouvelles annales
de mathématiques
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math.
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

